KEZDŐK

Első forduló

1. Határozza meg azokat a valós számpárokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlet:

$$x^4 + 6x^3 + \left|y^2 - x^2\right| + 9x^2 = 0.$$

2. Egységnyi élű kockákból egységnyi alapélű négyzetes oszlopokat készítünk, melyeknek a felszíne egy egységnyi élű kocka felszínének egész számú többszöröse. Hányféle ilyen négyzetes oszlop készíthető, ha legfeljebb 1997 darab egységnyi élű kocka áll rendelkezésünkre egy négyzetes oszlop előállításához?

3. Az ABC háromszögben a C csúcsnál tompaszög van. A háromszög AB oldalához hozzáírt kör az AC egyenest M, a BC egyenest N pontban érinti. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{3}(CM + CN) < AB < \frac{1}{2}(CM + CN).$$

4. A p valós paraméter mely értékei esetén van a valós számok halmazán pontosan egy megoldása az alábbi egyenletnek?

$$|x + 2| - p|x - 1| = 4$$

5. Az n és k pozitív egészekről azt tudjuk, hogy n páratlan, $k \geq 8$, az n (tízes számrendszerben) k jegyű, az $n - 1$ osztható 10 001-gyel, továbbá n számjegyeinek összege $6k + 3$, $\frac{n-1}{10\,001}$ számjegyeinek összege $3k + 1$, végül $\frac{n-1}{10\,001}$-ben található $k - 6$ darab megegyező, egymásutáni páratlan számjegy. Mi lehet a k?

Második forduló

I kategória: Szakközépiskolások

1. Az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm. Bizonyítsa be, hogy a $PQRS$ négyszög négyzet, és a négyzetek területeire fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$2 \cdot T_{PQRS} = T_{ABCD}.$$

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$[x] = \frac{8}{7}x - \frac{3}{7},$$

ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti.

3. Oldja meg az egész számpárok halmazán az alábbi egyenletet:

$$x^3 - y^3 = 91.$$

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Oldja meg az egész számpárok halmazán az alábbi egyenletet: $x^3 - y^3 = 91.$

2. Az $ABCD$ téglalap két szomszédos oldala 30 cm és 50 cm. Bizonyítsa be, hogy az $ABCD$ téglalap és a $PQRS$ négyszög területeire fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$30 \cdot T_{PQRS} = 17 \cdot T_{ABCD}.$$

3. A tízes számrendszerben hány olyan 6-tal osztható n jegyű szám ($n \in \mathbf{N}^+$ és $n > 2$) van, amelyre teljesül, hogy a számjegyeinek összege megegyezik azzal az $(n-1)$ jegyű számmal, amelyet belőle a legmagasabb helyiértékű helyen álló számjegyének elhagyásával kapunk?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Igaz-e, hogy bármely b és c valós számhoz található olyan K pozitív valós szám, hogy minden K-nél nagyobb a és x valós szám esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

2. Az ABC háromszögben $CA = CB$. Vegyen fel a háromszög köré írható kör BC ívén egy tetszőleges P pontot, és legyen a C-ből az AP-re bocsátott merőleges talppontja T. Igazolja, hogy

$$\overline{AT} = \overline{TP} + \overline{PB}.$$

3. Legyen

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{4n}\right), \qquad n \in \mathbf{N}^+.$$

Bizonyítsa be, hogy $c_n < c_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$.

HALADÓK
Első forduló

I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. A p paraméter mely értéke esetén van a

$$\sqrt{x - \sqrt{x - p}} = \sqrt{p + \sqrt{x - p}}$$

egyenletnek pontosan egy gyöke az egész számok halmazán?

2. Az A, illetve B középpontú kör kívülről érinti egymást az E pontban. Egyik közös külső érintőszakaszuk felezőpontja az F pont. Az FA és FB szakasz a két kört a C és D pontban metszi.

Bizonyítsuk be, hogy a CED szög nagysága független az érintkező körök sugarának hosszától!

3. Igazoljuk, hogy bármely valós a és b számra teljesül a $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$ egyenlőtlenség!

4. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának A csúcshoz közelebbi harmadolópontja az E pont, a DC oldal felezőpontja pedig az F pont. A négyzet AC átlóját a DE szakasz az M pontban, a BF szakasz az N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AEM és a CFN háromszögek hasonlóak!

5. Egy téglalap alakú táblázat 8000 darab mezőt tartalmaz. Kiválasztottuk néhány, de 2-nél több sorát és 2-nél több oszlopát. Azt tapasztaltuk, hogy azoknak a mezőknek a száma, amelyeknek sora és oszlopa közül legalább az egyik ki van választva, 1996. Hány sort és hány oszlopot választottunk ki?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\frac{x^2(x+1)}{y+1} + \frac{y^2(y-1)}{x-1} = \frac{2}{y+1} - \frac{2}{x-1}$$

egyenletet!

2. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalainak hossza, akkor

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4.$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja K, magasságpontja pedig M. Bizonyítsuk be, hogy ha a BAC szög $60°$-os, akkor az A csúcsból a KM szakaszra állított merőleges felezi a KM szakaszt!

4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely előállítható
a) $81^x - 5^y$,

b) $|81^x - 5^y|$
alakban, ahol x és y pozitív egész szám?

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Mekkora területű alakzatot határoznak meg azok a $P(x;y)$ koordinátájú pontok, amelyeknek x és y koordinátája kielégíti az $1996 \leq |x| + |y| \leq 1997$ egyenlőtlenségrendszert?

2. Egy ABC derékszögű háromszög CAB szöge $30°$, $AC = a$. Rajzoljunk az AC átfogó fölé félkört, majd A-ból, mint középpontból, AB sugárral körívet. Messe ez a körív a félkört D-ben. Mekkora a BCD síkidom területe?

3. Bizonyítsuk be, hogy az 5 az egyetlen olyan pozitív prímszám, amelynek négyzete öt darab pozitív prímszám négyzetének összegeként állítható elő!

4. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalainak hossza, akkor

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4.$$

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Van-e olyan valós $(x; y)$ számpár, amelyre teljesül, hogy

$$\frac{x^2(x+1)}{y+1}+\frac{y^2(y-1)}{x-1}=\frac{2}{y+1}-\frac{2}{x-1}\ ?$$

2. Az ABC háromszög AB oldalának Thálesz-köre az AC oldalt a P, a BC oldalt pedig a Q pontban metszi. Mekkora az ACB szög, ha a PQ szakasz felezi az ABC háromszög terrületét?

3. Öt pozitív prímszám négyzetének összege egy p (pozitív) prímszám négyzete. Határozzuk meg p^2 értékét!

4. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalainak hossza, akkor

$$3 \le \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4.$$

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Hányféleképpen lehet megválasztani az a, b, x, y pozitív egész számokat úgy, hogy teljesüljön a következő három feltétel:

– x és y legnagyobb közös osztója a;
– x és y legkisebb közös többszöröse b;
– a és b szorzata 10^{1997}?

2. Az AB átmérőjű egységsugarú k_1 kört az e egyenes a B pontban érinti. Egy r sugarú k_2 kör kívülről érinti a k_1 kört az A-tól és B-től különböző pontban, továbbá érinti az e egyenest is. Az A pontból a k_2 körhoz húzott egyik érintő érintési pontja C. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges r esetén az ABC háromszög egyenlő szárú!

3. Igazoljuk, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög szára b, beírt körének sugara pedig r, akkor $\dfrac{b}{r} > 3$.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Két párhuzamos egyenes közül az egyiken n darab, a másikon k darab pontot jelöltünk ki. Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelyeknek csúcsai a kijelölt pontok közül valók.

a) Igazoljuk, hogy n és k megválasztható úgy, hogy a háromszögek száma tetszőleges, adott négyzetszám legyen!
b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszögek száma nem lehet 3-nál nagyobb prímszám!

2. Az AB átmérőjű egységsugarú k_1 kört az e egyenes a B pontban érinti. Egy r sugarú k_2 kör kívülről érinti a k_1 kört az A-tól és B-től különböző pontban, továbbá érinti az e egyenest is. Az A pontból a k_2 körhoz húzott érintő egyik érintési pontja a C pont. Bizonyítsuk be, hogy az AC szakasz hossza független az r sugár hosszától!

3. Igazoljuk, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög szára b, beírt körének sugara pedig r, akkor $\dfrac{b}{r} > 3$.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Hányféleképpen lehet megválasztani az a, b, x, y, z pozitív egész számokat úgy, hogy teljesüljön a következő három feltétel:

– x, y és z legnagyobb közös osztója a;
– x, y és z legkisebb közös többszöröse b;
– a és b szorzata 10^{1997}?

2. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög lefedhető két darab 1 egység sugarú körlappal, akkor területe legfeljebb $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ területegység!

3. Rendelkezésünkre áll tetszőleges számú 3 egység, 5 egység és 8 egység oldalú négyzetlap. Ezekkel egy 1997 egység oldalú négyzetlapot kell hézagmentesen és átfedés nélkül kirakni. Igazoljuk, hogy a kirakáshoz mindhárom fajta négyzetlapot fel kell használni! Adjunk is meg egy megfelelő kirakást!

Az 1996/97. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny eredményei

KEZDŐK

I. kategória: Szakközépiskolások

A bizottság *I. díjat* nem adott ki.
II. díj:Nabadán János, Békéscsaba, Széchenyi I. Közg. és Külkeresk. Szki.,
tanára: Rókáné Rózsa Anikó.
III. díj:Magyari Máté, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola),
tanára: Mindáné Kolostori Nóra;
Tamás Katalin, Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külkeresk. Szki.,
tanára: Rókáné Rózsa Anikó.
I. dicséret: *Kiss Bálint*, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola, tanára: Mindáné Kolostori Nóra;
Tót Edit (Makó, Erdei F. Keresk. és Közg. Szki., tanára: Szabó Istvánné.
II. dicséret: *Hegedüs Zoltán Csaba*, Miskolc, Andrássy Gy. Műszaki Középiskola, tanára: Gonda Gáspár; *Varga Erika*, Budapest, Varga J. Közgazd. Szki., tanára: Vörös Sándor; *Győr Gyula*, Budapest, Neumann J. Számítástechn. Szki., tanára: Jakus Gabriella; *Horváth Zsolt*, Kaposvár, Naszlopy G. Közgazd. Szki., tanára: Farkas Éva; *Kovács Annamária*, Budapest, Varga J. Közgazd. Szki., tanára: Vörös Sándor; *Kiss Andrea*, Budapest, Varga J. Közgazd. Szki., tanára: Vörös Sándor; *Györfi Gábor*, Budapest, Hunfalvy J. Közgazd. Szki., tanára: Angyal Mária.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Zábrádi Gergely, Győr, Révai M. Gimnázium), tanára: Szíjártó Miklósné.
II. díj: Antók Péter, Budapest, Radnóti M. Gyakorlóiskola,
tanára: Marcsek Gábor;
Baharev Ali, Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimnázium,
tanára: Falta Zoltán;
Gyenes Zoltán, Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimnázium,
tanára: Drozdy Győzőné;
Máthé András, Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimnázium,
tanára: Tóth Attila.
III. díj: Hadházi Ádám, Eger, Dobó István Gimnázium,
tanára: Homolyáné Nagy Irma;
Hegedűs Ákos, Pécs, Ciszterci Rend Nagy L. Gimnáziuma,
tanára: Tornyos Tivadarné;
Ivaskó György, Baja, III. Béla Gimnázium,
tanára: Királyné Nagy Éva;
Oláh István, Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimnázium,
tanára: Konczné Végh Leona.
Dicséret: *Antal István*, Budapest, Veres Péter Gimnázium, tanára: Rácz Mihályné; *Herczeg Géza*, Szolnok, Varga Katalin Gimnázium, tanára: Dalmadiné Nagy Ilona; *Horváth Krisztina*, Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimnázium, tanára: Kovács Balázsné; *Martin Tamás*, Eger, Pásztorvölgyi Gimnázium, tanára: Hevesi Zoltán; *Soltész Noémi*, Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gimnázium, tanára: Drozdy Győzőné.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Kajtár Márton, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium,
tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc, Pósa Lajos, Fazakas Tünde.
II. díj: Ungi Tamás, Szeged, Radnóti M. Gimnázium,
tanárai: Schultz János, Vincze István.
III. díj: Flach Attila, Szeged, JATE Ságvári E. Gimnázium,
tanárai: Vargáné Nádházi Ágnes, Németné Varga Éva;
Hesz Zoltán, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium,
tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc, Fazakas Tünde;
Nagy Máté, Budapest, Árpád Gimnázium,
tanárai: Gyimesi Róbert, Mikusi Imre;
Pozsonyi Gergő, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium,
tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc, Fazakas Tünde.
I. dicséret: *Bárány Zsófia*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Beleznay Ferenc, Surányi László; *Csiszár Gábor*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanára: Juhász István, Rácz János; *Hudomiet Péter*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Beleznay Ferenc, Surányi László.
II. dicséret: *Gajári Dávid*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc, Fazakas Tünde; *Lábó Eszter*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Beleznay Ferenc, Surányi László; *Lábó Melinda*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Beleznay Ferenc, Surányi László; *Nagy Gábor*, Miskolc, Földes F. Gimnázium, tanárai: Vass István, Veres Pál.

HALADÓK

I. kategória: Szakközépiskolások

I. díj: Gera Zoltán, Budapest, Neumann J. Számítástechnikai Szki.,
tanára: Mészáros Tünde.
II. díj: Mihajlik Gábor, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola,
tanára: Fábián Gábor;
Szeremi Katalin, Eger, Egri Közgazdasági Szki.,
tanára: Nagy Lajosné.
III. díj: Horváth Zsolt, Székesfehérvár, Hunyadi M. Közg. Szki.,
tanára: Székely Ferencné.
Dicséret: *Barák Tamás*, Békéscsaba, Széchenyi I. Közg. és Külker. Szki., tanára: Schédl Ilona; *Sípos Péter*, Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Szki. és Gimn., tanára: Dunajszki Zsuzsanna; *Varga Gábor*, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árkoszállási Tibor.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I díj: Bosznai Tamás, Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn.,
tanára: Pósfai Péter;
Erős Zsolt, Békéscsaba, Belvárosi Ált. Isk. és Gimn.,
tanára: Kelemenné Kis Ilona;
Gueth Krisztián, Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimn.,
tanára: Sándor Endre;
Pál András, Budapest, Eötvös J. Gimn.,
tanárai: Gyengéné Beé Andrea, Somfai Zsuzsa.
II. díj: Lengyel Tímea, Budapest, Munkácsy M. Gimn.,
tanára: Gajdos Katalin.
III. díj: Pandúr Sándor, Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn.,
tanára: Pósfai Péter;
Szakács László, Budapest, Jedlik Á. Gimn.,
tanára: Gudenus Lászlóné, Sebestyén Zoltán.
I. dicséret: *Bujdosó Attila*, Budapest, Veres Péter Gimn., tanára: Varga Mária; *Mecz Balázs*, Pápa, Türr István Gimn., tanárai: Bátyi Gyuláné, Spissich László; *Boros Márton*, Budapest, Eötvös J. Gimn., tanárai: Somfai Zsuzsa,

Gyengéné Beé Andrea; *Pszota Anikó*, Vác, Madách I. Gimn., tanára: Ujhelyi László.
II. dicséret: *Sztranyák Zsolt*, Kecskemét, Katona J. Gimn., tanára: Szablics Bálint; *Spisák Ferenc*, Eger, Neumann J. Közg. Szki. és Gimn., tanára: Szakaliné Haraszti Éva; *Rácz Balázs*, Budapest, Veres Péter Gimn., tanára: Varga Mária; *Varga Csilla*, Budapest, Eötvös J. Gimn., tanára: Somfai Zsuzs, Gyengéné Beé Andrea; *Gönci Balázs*, Budapest, Móricz Zs. Gimn., tanárai: Lux Judit, Pósa Lajos; *Kiss Gergely*, Kecskemét, Katona J. Gimn., tanára: Reiter István; *Lovas Róbert*, Csongrád, Batsányi J. Gimn., tanára: Papp Ferencné.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Terpai Tamás, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.,
tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc, Pósa Lajos.
II. díj: Horváth Gábor, Debrecen, Fazekas M. Gimn.,
tanára: Nagy Erzsébet,
Végh László, Debrecen, Fazekas M. Gimn.,
tanára: Nagy Erzsébet.
III. díj: Förhécz András, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn.,
tanárai: Sipos Imre, Mihályi Gyula;
Patakfalvi Zsolt, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.,
tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc;
Lukács László, Miskolc, Földes F. Gimn.,
tanárai: Gulyás Tibor, ifj. Szabó Kálmán.
I. dicséret: *Hesz Gábor*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc; *Juhász András*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc.
II. dicséret: *Farkas Claudia*, Budapest, Szent István Gimn., tanárai: Magyar Zsolt, Lászlóné S. Stefánia; *Györey Bernadett*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., tanárai: Sipos Imre, Mihályi Gyula; *Lenk Sándor*, Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., tanárai: Pálovics Róbert, Németh László; *Pap Júlia*, Debrecen, Fazekas M. Gimn., tanára: Nagy Erzsébet; *Szabó Péter*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc, Koblinger Egmont, Nagy Dániel, Recski András, Pátzay György; *Szabó Zsolt*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc; *Szécsi Vajk*, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc.