[1]

I. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1997x^2 + 1998x + 1995$$

semmilyen x egész szám esetén nem lesz teljes négyzet.

2. Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

3. Legyen d_1, d_2, d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő három szakasz. Igazoljuk, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög kerületét jelöli.

4. Bizonyítsuk be, hogy $\underbrace{111\ldots1}_{2n\text{-szer}} - \underbrace{222\ldots2}_{n\text{-szer}}$ négyzetszám.

5. Egy hegyesszögű háromszög területe t. Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt konvex hatszög területe?

6. Léteznek-e olyan a_1, a_2, $\ldots$, a_n pozitív számok, amelyekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$a_1(1 + a_2a_3\ldots a_{n-2}a_{n-1}) > 1 + a_1a_2\ldots a_n, a_2(1 + a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n) > 1 + a_1a_2\ldots a_n, a_3(1 + a_4a_5\ldots a_na_1) > 1 + a_1a_2\ldots a_n, \vdots a_n(1$$

II. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül. Határozzuk meg ennek a pontnak a koordinátáit.

2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1, AB oldalának felezőpontja C_1, M a háromszög súlypontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha

$$CAA_1\sphericalangle = CC_1A_1\sphericalangle, \qquad A_1MC_1\sphericalangle = BAC\sphericalangle + ACB\sphericalangle?$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 5-nél nagyobb prímszám, akkor $p^4 - q^4$ osztható 60-nal.

4. Legyen $n > 1$ természetes szám. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív természetes számok halmazán:

$$x_1 + x_2x_3x_4\ldots x_n = 1997, x_2 + x_1x_3x_4\ldots x_n = 1997, x_3 + x_1x_2x_4\ldots x_n = 1997, \vdots x_n + x_1x_2x_3\ldots x_{n-1} = 1997.$$

5. Jelölje M az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontját, valamint E, F, G, H az M merőleges vetületeit az AB, BC, CD, DA oldalakra; föltesszük, hogy ezek az oldalak belső pontjai. Igazoljuk, hogy M az $EFGH$ négyszög oldalait érintő kör középpontja. Mikor lesz $EFGH$ húrnégyszög?

6. Van egy igen érdekes zsebszámológépünk, amely mindenféle kiinduló érté képes fogadni, de ennek bevitele után már csak összeadni, kivonni és reciprokot képezni tud, és mindig pontos értéket ad. A gépnek tetszőlegesen sok memóriája van, amelybe a fenti műveletek végzése közben bármilyen érték bevihető, illetve előhívható onnan. Tehát a számolások során a kiindulási számot és minden részeredményt többször is felhasználhatunk, más számot azonban nem. Ilyen feltételek mellett megkaphatjuk-e az 1-et végeredményül, ha a kiindulási szám

a) $\sqrt{19} + 97$; *b*) $\sqrt{19} + \sqrt{97}$?

III. évfolyam

1. Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozzuk meg a sorozat első négy tagjának az összegét.

2. A konvex n-oldalú sokszöget vágjuk szét háromszögekre. Minden háromszögbe írjunk kört. Bizonyítsuk be, hogy a körök sugarainak összege nagyobb vagy egyenlő $\dfrac{2T}{k}$-nál, ahol T az n-oldalú sokszög területe, k pedig a kerülete!

[1] A versenybeszámolót előző számunkban közöltük.

3. Adott a síkon n db pont, amelyek között nincs három, amely egy egyenesre esne, és nincs négy, amely egy körön lenne. Minden ponthármas köré kört írunk. Mutassuk meg, hogy a körök között lévő egységsugarú körök száma legföljebb $\dfrac{n(n-1)}{3}$.

4. Az $f(x)$ másodfokú polinomot helyettesíthetjük az $x^2 f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ vagy az $(x-1)^2 f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ polinom közül az egyikkel. Az $x^2+1997x+1998$ polinomból megkaphatjuk-e ilyen műveletek segítségével az $x^2+1996x+1997$ polinomot?

5. Bizonyítsuk be, hogy érvényes az

$$a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2)\geq 16tT$$

egyenlőtlenség, ahol t az a, b és c oldalú háromszög, T pedig az u v és w oldalú háromszög területe. Mikor áll fenn az egyenlőség?

6. Igazoljuk, hogy a $|\sin n|$ alakú számok halmazának (n nemnegatív egész) van legalább két olyan eleme, amelyek kisebbek $\dfrac{1}{1000}$-nél.

IV. évfolyam

1. Az $x>0$ valós számra $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ is egész szám.

2. Legyen f a pozitív egész számokon értelmezett függvény, értékei nemnegatív egészek. Az f minden pozitív egész x, y esetén kielégíti a következő feltételeket:
1. $f(xy)=f(x)+f(y)$, 2. $f(10x+3)=0$, 3. $f(10)=0$.
Adjuk meg a feltételeknek megfelelő f függvényeket.

3. Bizonyítandó, hogy $x^n y^n+1$ ($n\geq 1$ egész) nem állítható elő két olyan polinom szorzataként, amelyek közül az egyik csak az x-et, a másik csak az y-t tartalmazza.

4. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, az a oldallal szemközti szög α. Igazoljuk, hogy
1. ha α hegyesszög, akkor $\sin\dfrac{\alpha}{2}\leq\dfrac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}$;
2. ha α tompaszög, akkor $\dfrac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}\leq\sin\dfrac{\alpha}{2}\leq\dfrac{a}{b+c}$.

5. Állapítsuk meg az $\dfrac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{s^2}$ tört minimumát, ahol r_a, r_b, r_c a háromszög a, b, c oldalához hozzáírt körök sugara, s pedig a háromszög kerületének a fele.

6. Adott az $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{2}{n+1}$ rekurziót teljesítő sorozat, ahol $\dfrac{3}{2}\leq u_1\leq 2$. Igazoljuk, hogy $1<u_n<1+\dfrac{1}{n-1}$, ha $n\geq 2$.