Az Adriai tenger partján Novi Vinodolskiban május 8. és 11. között rendezték meg Horvátországban a hatodik országos matematika versenyt. A versenyen középiskolások és az általános iskola 7. és 8. osztályos diákjai szerepeltek. Az országos döntőbe meghívásos alapon évfolyamonként 25–30 legjobb diák vehetett részt. Az iskolai versenyeket február végén tartják. A legjobbak indulhatnak a községi versenyen. Ezután következik a megyei erőpróba, ahol évenként kb. 900–1000 tanuló szerepel.

Az országos döntő egyben jutalomkirándulás is az ott résztvevőknek. Alkalom nyílik a házigazda város és környéke nevezetességeinek megismerésére.

A versenypéldákat a Horvátországi Matematika Társulat bizottsága állítja össze. Évfolyamonként négy-négy példát tűznek ki. A példák megoldására a versenyzőknek négy óra áll a rendelkezésre. A döntő legjobbjai alkotják Horvátország válogatottját a matematikai olimpián.

Az 1996/97-es évben évfolyamonként a következő példákat tűzte ki a versenybizottság:

I. évfolyam

1. Legyen az n természetes szám. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$||\dots|||x-1|-2|-3-\dots-(n-1)|-n|=0.$$

2. Legyenek $a<b<c<d$ adott valós számok. Határozzuk meg mindazokat a p, q, r, s számokat, amelyekre $\{a,\ b,\ c,\ d\}=\{p,\ q,\ r,\ s\}$ és a

$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2$$

kifejezés értéke minimális.

3. Legyen adott egy kör és annak egy húrja, amely a kört két körszeletre osztja. A körszeletekbe k_1, k_2 kört írunk be úgy, hogy belülről a k kört míg az adott húrt egy közös pontban érintsék. Bizonyítsuk be, hogy a k_1, k_2 körök sugarainak aránya konstans, vagyis nem függ a húron levő közös érintő pont helyzetétől.

4. Egy végtelen nagy négyzetes fehér papírlapon némely négyzetek piros szinűek. Minden 2×3-as téglalapban pontosan két piros négyzet van. Hány piros négyzet van egy tetszőleges 9×11-es téglalapban?

II. évfolyam

1. Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja O. A $\overline{CD}$ és a $\overline{DE}$ oldalak felezőpontjait jelöljük M és N-nel, míg az AM és BN egyenesek metszéspontját L-lel. Igazoljuk:

a)Az ABL háromszög területe megegyezik a $DMLN$ négyszög területével;

b)$ALD\sphericalangle=OLN\sphericalangle=60^\circ$;

c)$OLD\sphericalangle=90^\circ$.

2. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c pozitív egymástól eltérő valós számok esetén

$$a^ab^bc^c>a^bb^cc^a.$$

3. A tizes számrendszerben a 2^{1997}-nek m számjegye, míg a 5^{1997}-nek n számjegye van. Számítsuk ki az m és az n összegét!

4. Egy síkban adott 1997 pont. Igazoljuk, hogy az összes lehetséges két pont közötti távolság között 32 különböző van.

III. évfolyam

1. Legyenek az x, y, z, a, b, c olyan természetes számok, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$x^2+y^2=a^2\qquad x^2+z^2=b^2\qquad y^2+z^2=c^2$$

Igazoljuk, hogy x, y, z szorzata osztható:

a) 5-tel

b) 55-tel.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x és minden természetes n számra érvényes

$$|\cos x| + |\cos 2x| + \ldots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

3. Az $ABCD$ tetraéder ABD, ACD, BCD és BCA oldalainak területeit jelöljük S_1, S_2, Q_1 és Q_2-vel. Az ABD és ACD, valamint a BCD és BCD oldalak által bezárt szög legyen α, valamint β. Igazoljuk, hogy

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\cos\beta.$$

4. Az ABC háromszög oldalaira ABD, BCE, CAF hasonló háromszögeket szerkesztettünk ($k = |AD| : |BE| = |BE| : |EC| = |CF| : |FA|$, $\alpha = ABD\sphericalangle = BEC\sphericalangle = CFA\sphericalangle$). Bizonyítsuk be, hogy az $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ és $\overline{EF}$ szakaszok felezőpontjai egy paralelogramma csúcsai, melynek egyik szöge egyenlő α-val, míg a szomszédos oldalainak aránya egyenlő k-val.

IV. évfolyam

1. Határozzuk meg a 3^{1000} és a 3^{1997} számok utolsó négy számjegyét.

2. Egy síkban adott egy k kör és egy K pont. A k kör tetszőleges két különböző P, Q pontján és a K ponton áthalad a k' kör. Legyen M a k' körhöz a K pontból húzott érintő és a PQ egyenes metszéspontja. Mi az M pontok mértani helye, ha a P és a Q pont végig fut a k kör kerületén?

3. Az f a pozitív egész számokon értelmezett függvény, és:

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 2,$$
$$f(n+1) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n)), \quad (n \geq 1).$$

a)Igazoljuk, hogy $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$ minden $n \geq 1$ esetén.

b)Ha az $f(n)$ páratlan, akkor igazoljuk, hogy $f(n+1) = f(n) + 1$.

c)Az adott k természetes számra határozzuk meg mindazon n értékéket, amelyekre $f(n) = 2^{k-1} + 1$.

4. Legyen a k természetes szám. Határozzuk meg azon nem egybevágó háromszögek számát, amelyek csúcsai egybeesnek egy adott szabályos $6k$-szög csúcsaival.

Horváth Vilmos **Horváth Bokor Rózsa**