

A Janus Pannonius Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Karának Matematika Tanszéke 1997. április 4–5-én rendezte meg a műszaki főiskolák hagyományos (19-edik) Hajós György Matematikai Versenyét Péccsett.

A versenyen 13 főiskola 49 hallgatója vett részt.

Az alábbi főiskolák csapatai végeztek az első három helyen:

1. *Széchenyi István Főiskola*, Győr
2. *Kandó Kálmán Műszaki Főiskola*, Budapest
3. *Miskolci Egyetem Dunaújvárosi Főiskolai Kar*

Az egyéni verseny első hat helyezettje:

1. *Zsámboki Ferenc* (Széchenyi István Főiskola)
2. *Hadászi Zoltán* (Kandó Kálmán Műszaki Főiskola)
3. *Veres Zoltán* (Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem Szolnoki Repülőtisztai Főiskolai Kar)
4. *Békési Zoltán* (Kandó Kálmán Műszaki Főiskola)
5. *Dick Attila* (Janus Pannonius Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Kar)
6. *Szjártó Miklós* (Széchenyi István Főiskola)

Sárvári Csaba

A verseny feladatai

1. Az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1997}$ sorozat tagjai az $1, 2, 3, \dots, 1997$ számok egy permutációját alkotják. Igaz-e, hogy ekkor az

$$(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 2) \cdot (x_3 + 3) \cdot \dots \cdot (x_{1997} + 1997)$$

szorzat mindig osztható 3-mal?

2. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\{\sin x\}^2 + \{\cos x\}^2 = \{\sin^2 x\} + \{\cos^2 x\}.$$

($\{y\} = y - [y]$, ahol $[y]$ az y szám egészrészét jelenti.)

3. Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzet tetszőleges P belső pontján át az oldalakkal párhuzamosan húzott egyenesek a négyzetet négy téglalpra osztják.

a) Bizonyítsa be, hogy bármelyik két, átlósan elhelyezkedő (tehát csak egy közös csúccsal rendelkező) téglalapot véve, nem fordulhat elő, hogy mindkettő területe nagyobb $1/4$ -nél!

b) Általánosítsa a fenti állítást négyzet helyett más sík- és térbeli alakzatokra!

4. Határozza meg az összes olyan polinomot, amelynek a $2x$ helyen vett helyettesítési értéke minden x -re megegyezik az első és második deriváltja x helyen vett helyettesítési értékeinek szorzatával!

5. Az $ABCD$ tetraéder AB élének egy pontján keresztül a tetraéder ACD , illetve BCD oldallapjával párhuzamos síkokat vettünk fel. Az így keletkezett két kis tetraéder térfogata 8 illetve 1 cm^3 . Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata?