Idén a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola rendezte meg a tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikaversenyét. A hagyományoknak megfelelően minden főiskola 5 fővel képviseltette magát. Idén az egriek sajnos nem tudtak eljönni, így csak 5 főiskola volt jelen. A budapesti, a szegedi, a szombathelyi a pécsi és a nyíregyházi hallgatók reggel 8-tól 1-ig foglalkozhattak a feladatok megoldásával. Urbán János, a zsűri elnöke a főiskolák javaslatai alapján az alábbi feladatokat állította össze:

1. Természetes számokból álló sorozatokat konstruálunk a következőképpen. A sorozat első tagja, a_1 természetes szám. A sorozat n-edik tagjából, a_n-ből úgy kapjuk a következőt, a_{n+1}-et, hogy a_n utolsó számjegyét „levágjuk", megszorozzuk néggyel, és a kapott szorzatot a levágás után maradt számhoz adjuk. Pl. ha $a_n = 1997$, akkor $a_{n+1} = 199 + 7 \cdot 4 = 227$.

Bizonyítsuk be, hogy ha egy így kapott sorozatnak 1001 tagja, akkor a sorozatnak egyetlen tagja sem lehet prímszám!

2. Egy tetraéder belsejében felvett tetszőleges ponton át a tetraéder lapjainak síkjaival párhuzamos síkokat húzunk. Ezek a síkok a tetraédert olyan részekre osztják, amelyek között négy tetraéder található.

Mekkora az adott tetraéder térfogata, ha a vágásokkal keletkezett 4 tetraéder térfogata V_1, V_2, V_3, V_4?

3. Tekintsük az ABC háromszög oldalait érintő négy kör közül azt a kettőt, amelyek az AB oldalt (A és B között) érintik. Bizonyítsuk be, hogy e két kör sugarának mértani közepe nem lehet nagyobb az AB oldal felénél!

4. Adott egy konvex n-szög. Meghúztuk az összes átlóját és az n-szög belsejében egyik ponton sem halad át kettőnél több átló. Hány részre bontják az átlók a sokszögtartomány?

Adjunk alsó becslést a kapott részek között található háromszögek számára!

5. Mutassuk meg, hogy nincs olyan különböző számokból álló végtelen számtani sorozat, amelynek minden eleme hatványszám, azaz egy pozitív egész szám egynél nagyobb egész kitevőjű hatványa!

6. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az $f(x,y) = \dfrac{y+a}{x+a}$ függvénynek a $T : x^2 + y^2 \le 1$ tartományon felvett minimuma legalább $\dfrac{1}{2}$ legyen!

7. Ismert, hogy ha x egy tetszőleges valós szám, akkor

$$e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Legyen A egy 2×2-es mátrix és definiáljuk az $e^A - 1$ kifejezést az előző formula alapján, tehát legyen

$$e^A - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(egy mátrixsor konvergens, ha a komponensei konvergensek).

Van-e olyan A 2×2-es mátrix, amelyre

$$e^A - 1 = [e - 119970e - 1] \text{ teljesül?}$$

Wintsche Gergely