1. a) Könnyen igazolhatjuk, hogy $\log_{2^k} 3^k = \log_2 3$. Ezt alkalmazva az egyenletünk a következő alakban írható: $n \cdot \log_2 3 = \log_2 81$, amiből $\log_2 3^n = \log_2 3^4$. Ebből pedig az $n = 4$ megoldást kapjuk.

1. b) $2\sqrt{10 \cdot 9^{x-1} - 81} = 96 - 10 \cdot 9^{x-1}$ alakúra hozzuk az egyenletet. Mivel a gyök alatti és a jobb oldali kifejezésnek is nemnegatívnak kell lenni, azért $8,1 \le 9^{x-1} \le 9,6$. Legyen $10 \cdot 9^{x-1} = a$, ekkor a megoldandó egyenlet $2\sqrt{a-81} = 96 - a$, ahol $81 \le a \le 96$. Emeljünk négyzetre: $4(a-81) = 9216 - 192a + a^2$. A beszorzás és a rendezés után: $a^2 - 196a + 9540 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján: $a_1 = 106$, $a_2 = 90$. Az első szám nincs az értelmezési tartományban. Tehát $10 \cdot 9^{x-1} = 90$, amiből könnyen adódik az $x = 2$ megoldás.

2. Tudjuk, hogy $\dfrac{(a+b)^2}{16} = ab$, amiből $a^2+b^2 = 14ab$. A Pitagorasz-tétel alapján $14ab = c^2$. Írjuk ezt át a következő alakba: $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{14}$. Vagyis $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{14}$, amit szorzunk 2-vel, és $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha = \dfrac{1}{7}$ értéket kapunk.

3. Az $ABCD$ téglalap AC átlójának felezőpontja F, a felezőmerőlegese E-ben metszi az AB-t, és G-ben CD-t. $AB = CD = a$, $BC = DA = b$. Az ACG egyenlő szárú derékszögű háromszög, hiszen GF az AC-t merőlegesen felezi, ezért $GC = GA$. Ezek szerint GC nem lehet egyenlő a rövidebb b odallal, mert ekkor $GC = GA = b$, és GA nem egyenlő DA egymásnak ellentmondó állításokhoz jutnánk. Így $DG = b$, $GC = a - b$, amiből $AG = a - b$ következik. Az ADG derékszögű háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $b^2 + b^2 = (a-b)^2$. Elvégezzük a négyzetreemelést, és elveszünk b^2-et: $b^2 = a^2 - 2ab$. Adjunk mind a két oldalhoz $(a^2 + 2ab)$-t: $a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2$, vagyis $(a+b)^2 = a^2 + a^2$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $a + b$ egy a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója lesz.

4. Tudjuk, hogy $t = \dfrac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$, amiből $\dfrac{ab}{m_c} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$. Felírhatjuk továbbá, hogy $m_c \le a$, valamint $m_c \le b$. E két összefüggés közül egyszerre legfeljebb az egyikben lehet egyenlőség, ezért $m_c^2 < ab$. Írjuk ezt $m_c < \dfrac{ab}{m_c}$ alakban. Vagyis kapjuk a bizonyítandó állítást: $\dfrac{c}{\sin\gamma} > m_c$.

5. Pitagorasz tétele szerint: $A_{4k}A_{4k+1} = (4k+1)\sqrt{2}$, $A_{4k+1}A_{4k+2} = 4k+2$, $A_{4k+2}A_{4k+3} = (4k+3)\sqrt{2}$, $A_{4k+3}A_{4k+4} = 4k+4$. Mivel $1997 = 4 \cdot 449 + 1$, azért a keresett hossz:

$$(1 + 3 + \cdots + 1997) \cdot \sqrt{2} + (2 + 4 + \cdots + 1996) = 999^2 \cdot \sqrt{2} + 998 \cdot 999 = 998\,001 \cdot \sqrt{2} + 997\,002.$$

6. Az $ABCDEFGH$ téglatest oldalélei legyenek $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$. Az $ACHF$ olyan tetraéder, amelynek a szemközti élei páronként egyenlőek (a téglatest szemközti lapjainak egy-egy átlója lesz a tetraéder éle), és ezeknek a kitérő éleknek a távolságai pontosan az a, b, c. Az adott élhosszúságokkal és a téglatest éleivel a következő egyenletek írhatók fel (Pitagorasz-tétel):

$$a^2 + b^2 = 340, \qquad b^2 + c^2 = 369, \qquad c^2 + a^2 = 421.$$

Ebből az egyenletrendszerből kapjuk: $a^2 = 196$, $b^2 = 144$, $c^2 = 225$. A keresett távolságok: 14, 12, 15.

7. Használjuk a következő jelöléseket: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, nevezzük el a B pont merőleges vetületét az A szintjében B_1-nek, a C pont merőleges vetületét a B szintjében C_1-nek, az A szintjében C_2-nek. $AB_1 = 80 \cdot \operatorname{ctg} 10^\circ \approx 751,4$ $c = \dfrac{80}{\sin 10^\circ} \approx 460,83$, $a = \dfrac{120}{\sin 12^\circ} \approx 577,2$. Az ABC szöget nevezzük β-nak, ekkor az ABC háromszögben a koszinusztétel szerint: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$. A kiszámított oldalakat beírjuk, és kifejezzük az ismeretlent: $\cos\beta = \dfrac{460,83^2 + 577,2^2 - 751,4^2}{2 \cdot 460,83 \cdot 577,2} \approx -0,0359$. A keresett szög: $\beta \approx 92^\circ 03'$.

8. Tudjuk, hogy $1^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ és $1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Vegyük a hányadosukat: $\dfrac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)} = k$, és tegyük fel, hogy n, k pozitív egészek. Szorozzunk a nevezővel: $3n(n+1) = 2k(2n+1)$.

Ezután hozzuk a következő alakra: $3n^2 + (3-4k)n - 2k = 0$, ebből az n-et kifejezve:

$$n_{1,2} = \frac{4k - 3 \pm \sqrt{(4k-3)^2 + 24k}}{6} = \frac{4k - 3 \pm \sqrt{16k^2 + 9}}{6}.$$

A diszkriminánsnak négyzetszámnak kell lenni. A $k = 0$ és a $k = 1$ esetén ez teljesül. Könnyen látható, hogy nagyobb érték nem jöhet szóba, hiszen $k \ge 2$ esetén $(4k)^2 = 16k^2 < 16k^2 + 9 < 16k^2 + (8k+1) = (4k+1)^2$. Kiszámoljuk a lehetséges n értékeket, a következőket kapjuk: 0, -1, 1, $-\dfrac{2}{3}$. Csak az $n = 1$ esetén lenne a hányados egész, vagyis a feladat kérdésére nemmel kell válaszolnunk.

Számadó László