A mátrafüredi Vadas Jenő Erdészeti Szakközépiskola kilenc esztendeje rendezi meg immár hagyományosnak számító matematikaversenyét szakközépiskolásoknak. 1995-ben először, gimnazistáknak is lehetőségük nyílt arra, hogy tudásukat megyei szinten összemérjék. 1996-ban már két kategóriában egyszerre rendezte meg a vetélkedőt a Vadas Jenő Szakközépiskola.

A szakközépiskolások versenye *Kertész Andor*, a debreceni egyetem nagyhírű matematikaprofesszora, a gimnazistáké *Palotás József*, az egri Tanárképző Főiskola tanára, volt megyei szakfelügyelő nevét viseli.

A verseny az egri Polgármesteri Hivatal és a Heves Megyei Pedagógiai Intézet jelentős támogatásával zajlott le.

Mindkét kategóriában az I. és II. osztályosok, illetve a III. és IV. osztályosok ugyanazt a feladatsort írták. Mindegyik feladatsor négy, részletes kidolgozást és indoklást kívánó és három teszt jellegű feladatot tartalmazott, a megoldásra két óra állt rendelkezésre. A verseny ideje alatt a kísérő tanárok az általános iskolások koncertjén és íjászbemutatón vehettek részt.

A Palotás József Verseny helyezettjei:

I. osztály: **1.** *Fehér Bence*, Eger, Szilágyi Erzsébet Gimnázium; **2.** *Matin Tamás*, Eger, Pásztorvölgyi Gimnázium; **3.** *Szabó Dániel*, Eger, Szilágyi Erzsébet Gimnázium.

II. osztály: **1.** *Tóth Bálint*, Eger, Gárdonyi Géza Gimnázium; **2.** *Abonyi Zsolt*, Eger, Szilágyi Erzsébet Gimnázium; **3.** *Imrek József*, Eger, Lenkey János Honvéd Gimnázium.

III. osztály: **1.** *Bakos Péter*, Eger, Szilágyi Erzsébet Gimnázium; **2.** *Négyesi Gábor*, Eger, Szilágyi Erzsébet Gimnázium; **3.** *Sexty Dénes*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium.

IV. osztály: **1.** *Király Tamás*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium; **2.** *Szkalák István*, Eger, Gárdonyi Géza Gimnázium; **3.** *Vágner Anikó*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium.

A Kertész Andor Verseny helyezettjei:

I. osztály: **1.** *Spisák Ferenc*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium; **2.** *Szeremi Katalin*, Eger, Közgazdasági Szakközépiskola; **3.** *Géczi Mária*, Eger, Kossuth Zsuzsa Egészségügyi Szakközépiskola.

II. osztály: **1.** *Löffler Szabolcs*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium; **2.** *Novák Ferenc*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium; **3.** *Kiss Noémi*, Eger, Közgazdasági Szakközépiskola.

III. osztály: **1.** *Ács Gábor*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium; **2.** *Kis Tamás*, Gyöngyös, Vak Bottyán János Szakközépiskola; **3.** *Brezniczky János*, Eger, Wigner Jenő Szakközépiskola.

IV. osztály: **1.** *Stikkel Gábor*, Eger, Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium; **2.** *Tajti Imre*, Eger, Közgazdasági Szakközépiskola; **3.** *Bihari Tamás*, Eger, Wigner Jenő Szakközépiskola.

A díjazottak könyvjutalmat és oklevelet vehettek át. Az egri Polgármesteri Hivatal részéről a Palotás József Versenyen a legjobban szereplő csapatnak felajánlott vándorserleget az egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium csapata kapta. A vándorserleget és a díjakat – a versenyt méltató szavak után – Czapáry Endre tanár úr, a zsűri elnöke adta át. A Bolyai János Matematikai Társulat által hivatalos megyei versenyként elismert matematikavetélkedőt 1997-ben is Mátrafüreden rendezik meg.

Bíró Bálint szaktanácsadó

Heves Megyei GimnáziumokPalotás József Matematikai Emlékversenyének feladataiI.–II. osztály

1. Legalább hány 3-nál nagyobb prímszámot kell megadni ahhoz, hogy a számok négyzetének összege 12-vel osztható legyen?

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x, y valós számokra fennáll az

$$(x-1)\cdot(y+1)<x^2+y^2 \qquad \text{egyenlőtlenség.}$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha m és n pozitív egészek:

$$\frac{1}{9m}+\frac{9}{n}=\frac{1}{6}.$$

4. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalán rendre úgy helyezkednek el a D, E és F pontok, hogy $BD=CD$, $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{3}{2}$ és $\dfrac{AF}{BF}=3$. Az ABC háromszög területének hányad része a DEF háromszög területe?

5. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{x | x \in \mathbf{N},\ 0 \le x \le 10\}, \qquad B = \left\{ \left[\frac{y}{5}\right] \middle| \ y \in \mathbf{N},\ 1 < y < 50 \right\},$$

ahol $\left[\frac{y}{5}\right]$ az $\frac{y}{5}$ szám egész részét, azaz az $\frac{y}{5}$-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat jelenti. A $B \setminus A$ halmaz elemeinek száma:

5

a) 2 b) 4 c) 5 d) 1 e) 0

6. Az ABC háromszög M magasságpontján át húzzunk párhuzamos az AB oldallal. Ez a párhuzamos az AC oldalt D-ben, a BC oldalt E-ben metszi. Tudjuk, hogy az ABC háromszög körülírt körének középpontja a DE egyenesen van. A $\frac{DE}{AB}$ arány értéke:

5a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{5}$

7. A $\sqrt{4x+17+12\cdot\sqrt{x+2}} - \sqrt{4x+17-12\cdot\sqrt{x+2}}$ legnagyobb értéke, ha $x > 1$

5

a) 0 b) 34 c) 17 d) 6 e) nem határozható meg egyértelműen

III.–IV. osztály

1. Milyen számjegyre végződik a következő szám?

$$(1! + 2! + 3! + \cdots + 1996!)^3$$

($n!$ az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ számot jelenti, $1!$ megállapodás szerint 1.)

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\log_2(x+3) \cdot \log_2(x-3) = \log_2\left[(x+3)^3 \cdot (x-3)\right] - 3$$

3. Egy téglatest egyik csúcsából induló testátlója az ugyanezen csúcsból induló lapátlókkal rendre az α, β, γ szögeket zárja be. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \le \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha p és q pozitív prímszám:

$$25p^2 + 9q^2 - 2515p - 1509q + 30pq + 1996 = 0$$

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge $120°$-os. A BC oldal felezéspontja D. A D pontban a BC-re állított merőleges az AB szakaszt E-ben metszi. Mennyi az ACE és BCE háromszögekbe írt körök sugarának aránya?

5a) $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

6. Az ABC egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge $90°$-os. Legyen H mindazon P pontok halmaza, amelyekre a PA, PB és PC szakaszok négyzetei ilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak. H-nak az ABC háromszög belsejébe vagy a határára eső eleme:

a) csak a BC szakasz C-hez közelebbi negyedelőpontja
b) csak az AB szakasz felezéspontja
c) a BC szakasz C-hez közelebbi negyedelőpontját és AB felezéspontját összekötő szakasz minden pontja
d) csak az AC szakasz A-hoz közelebbi negyedelőpontja
e) nincs ilyen pont.

7. A $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 4 \cdot \cos 5x$ egyenlet valós megoldásainak száma a $]0; 2\pi[$ számközben:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) nincs valós megoldása.

Heves Megyei Szakközépiskolák Kertész Andor Matematikai Emlékversenyének feladatai

I.–II. osztály

1. Az ABC háromszög AB oldala mint átmérő fölé rajzolt kör az AC oldalt a D, a BC oldalt az E belső pontokban metszi oly módon, hogy $CE = DE$ és $CD = BE$. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x, y valós számokra fennáll az

$$(x-1)\cdot(y+1) < x^2 + y^2 \qquad \text{egyenlőtlenség.}$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y pozitív egész:

$$\frac{x^2}{2} + x\cdot y + x + y = 997{,}5$$

4. Az $f(x) = \Big||x-2| - |x+2|\Big|$ és a $g(x) = -\frac{3}{5}x + 1$ függvények képe mekkora nagyságú zárt területet határoz meg?

5. Hány olyan p és q pozitív prímszámokból álló számpár van, amelyekre $3p^2 = q + 1996$ teljesül, ahol $q < 1996$?
a) nincs ilyen számpár b) 1 c) 2 d) 3 e) 10

6. Hány olyan egész szám van, amelynek négyzete négyjegyű szám és ha ebben a négyjegyű számban az egyesek és a százasok helyén álló számjegyet fölcseréljük, akkor az eredetinél kettővel nagyobb szám négyzetét kapjuk?
a) nincs ilyen szám b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

7. Hány pozitív egész n-re lesz a $4n-3$, $15n-4$, $12n+4$ számhármas valamilyen sorrendben egy derékszögű háromszög három oldalának mérőszáma?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) nincs ilyen n.

III.–IV. osztály

1. Legyen az $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 4)$ függvény értelmezési tartománya D_f, a $g(x) = \sqrt[6]{-2x^2 + 6x + 20}$ függvény értelmezési tartománya D_g. Határozzuk meg a $D_f \cap D_g$ halmazt.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x pozitív egész:

$$7^5 \cdot 7^8 \cdot \dots \cdot 7^{3x+2} = \left(0{,}\dot{1}4285\dot{7}\right)^{-124}$$

3. Egy kocka A csúcsából induló testátlójának A-hoz közelebbi harmadolópontja legyen H. Tekintsük H-nak a kocka mindazon csúcsaitól mért távolságait, amelyek nincsenek rajta az A-ból induló testátlón. Ezen szakaszok hosszának szorzata a kocka felszínének és térfogatának szorzatával egyenlő. Mekkora a kocka felszíne és térfogata?

4. Adjuk meg a $\dfrac{\sin^2 x - 2\sin x + 15}{\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 6}}$ kifejezés legkisebb értékét és az összes olyan x valós számot, amelyre ezt a legkisebb értéket a kifejezés fölveszi.

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge $120°$-os. A BC oldal felezéspontja D. A D pontban a BC-re állított merőleges az AB szakaszt E-ben metszi. Mennyi az ACE és BCE háromszögekbe írt körök sugarának aránya?

a) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$

6. Hány olyan x egész szám van, amelyre a $6x^2 - 7x - 20$ kifejezés egy pozitív prímszámmal egyenlő?
a) nincs ilyen szám b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

7. A $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 4 \cdot \cos 5x$ egyenlet valós megoldásainak száma a $]0; 2\pi[$ számközben:
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) nincs valós megoldása.