$$(1) \qquad f^2-(x^4-2x)g^2=1.$$

Ha az $f,\ g$ polinomokra teljesül (1), és $F,\ G$-re is teljesül

$$(2) \qquad F^2-(x^4-2x)G^2=1,$$

akkor (1) és (2) bal oldalainak a szorzata is 1-gyel egyenlő. Ez a szorzat a tényezőivel megegyező alakra hozható:

$$(3) \qquad \left[f^2-(x^4-2x)g^2\right]\left[F^2-(x^4-2x)G^2\right]=\left[fF+(x^4-2x)gG\right]^2-(x4-2x)[fG+gF]^2.$$

Ennek alapján két – nem feltétlenül különböző – megoldásból előállíthatunk egy újabb megoldást:

$$(4) \qquad \begin{aligned}\varphi&=fF+(x^4-2x)gG,\\ \psi&=fG+gF,\end{aligned}$$

és ha $f,\ g,\ F,\ G$ egész együtthatós polinomok voltak, az lesz a $\varphi,\ \psi$ polinom is.

Triviális megoldása (1)-nek az $f=1,\ g=0$ polinompár, ha azonban e mellé a vele azonos $F=1,\ G=0$ párt vesszük, a $(\varphi,\ \psi)$ pár is azonos lesz vele, így nem kapunk újabb megoldást.

Ha g valamilyen 0-tól különböző c egésszel volna egyenlő, $f^2(1)=1-c^2$ volna, így csak $c^2=1$ jöhetne szóba. Ekkor (1)-ből $f^2=x^4-2x+1$, ami nem polinom teljes négyzete (például $x=2$ mellett sem az a helyettesítési értéke)

g tehát legalább elsőfokú: $g(x)=c+dx$. Ekkor

$$f^2=(x^4-2x)(c+dx)^2+1=d^2x^6+2cdx^5+c^2x^4-2d^2x^3-4cdx^2-2c^2x+1,$$

tehát f csak $dx^3+cx^2\mp cx\pm f1$, vagy ennek (-1)-szerese lehet. Ennek négyzetében x^4 együtthatója $c^2\mp 2cd$, ami csak akkor lehet c^2-tel egyenlő, ha $cd=0$, tehát $c=0$, hiszen $d=0$ visszavezetne a már tárgyalt $g=c$ esetre. A $dx^3\pm 1$ polinom négyzetében x^3 együtthatója $\pm 2d$, ami csak az (x^3-1) választás mellett egyenlő $-2d^2$-tel. Az

$$f=x^3-1, \qquad g=x$$

polinomokból az $F=f,\ G=g$ választással a (4) szerint az

$$\begin{aligned}f_2&=(x^3-1)^2+x^2(x^4-2x),\\ g_2&=2x(x^3-1)\end{aligned}$$

megoldást kapjuk. Ebből az $F=f_2,\ G=g_2$ választással újabb $f_3,\ g_3$ párt állíthatunk elő. Általában, ha valamilyen n természetes számra már meghatároztuk az $f_n,\ g_n$ párt, azt az $F,\ G$ helyére téve az

$$\begin{aligned}f_{n+1}&=ff_n+(x^4-2x)gg_n,\\ g_{n+1}&=fg_n+gf_n\end{aligned}$$

párt kapjuk. Ha f_n $3n$-ed fokú, g_n $(3n-2)$-ed fokú, és mindkettőben a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív, e tulajdonságok öröklődnek az $f_{n+1},\ g_{n+1}$ párra. Mivel például az $f_2,\ g_2$ párnak megvannak a mondott tulajdonságai, e tulajdonságok öröklődnek az egész sorozatra, tehát a sorozat elemi különbözőek. A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A (3) azonosság alapja az, hogy az

$$f+g\sqrt{x^4-2x}$$

alakú függvények köréből a szorzás nem vezet ki. Ha ugyanis ezt a polinomot az

$$F+G\sqrt{x^4-2x}$$

függvénnyel szorozzuk, épp a

$$\varphi+\psi\sqrt{x^4-2x}$$

függvényt kapjuk, ahol $\varphi,\ \psi$ a (4) alatti polinomok.

A megoldók többsége csak azt vette észre, hogy (1)-ből négyzetreemeléssel megoldást állíthatunk elő, így az $f_n,\ g_n$ sorozatnak csak az $n=2^k$ indexekhez tartozó elemeit adta meg. Persze a feladat állításának igazolásához ez is elegendő volt. Belátható, hogy (-1)-gyel való szorzástól eltekintve mi előállítottuk az összes megoldást.