1. Azonos átalakításokkal és rendezéssel kaphatjuk a következő egyenleteket: 2

a) $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ b) $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9}{2\sqrt{2}}$.

Az exponenciális függvények szigorú monotonitása miatt a megoldások $x = \frac{3}{2}$, illetve $x = \log_{\frac{9}{2}} \frac{9}{2\sqrt{2}}$.

2. Jelölje a a sorozat harmadik tagját, d a sorozat differenciáját. A feltételek alkalmazásával

$$(a-2d)(a-d) = 3 \qquad \text{és} \qquad (a+2d)(a+d) = 63.$$

A két egyenlet kivonásából, majd összeadásából kapjuk, hogy $ad = 10$ és $a^2 + 2d^2 = 33$.

Helyettesítő módszerrel $a^4 - 33a^2 + 200 = 0$ (vagy $2d^2 - 33d^2 + 100 = 0$), $a^2 = 25$ vagy $a^2 = 8$.

Ha $a = 5$, akkor $d = 2$ és $a_1 = 1$, ha $a = -5$, akkor $d = -2$, $a_1 = -1$, ha $a = 2\sqrt{2}$, akkor $d = \frac{5}{2}\sqrt{2}$, $a_1 = -3\sqrt{2}$, ha pedig $a = -2\sqrt{2}$, akkor $d = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $a_1 = 3\sqrt{2}$.

3. Ha $\sin(\alpha - \beta) = 0$, akkor $\alpha - \beta = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, így $\beta = \alpha - k\pi$, $2\beta = 2\alpha - 2k\pi$, tehát $2\beta - \alpha = \alpha - 2k\pi$. Innen $\sin(2\beta - \alpha) = \sin(\alpha - 2k\pi) = \sin\alpha$.

4. Az egyenlet diszkriminánsa ($m \neq 0$), $D = 4(m+1)^2$, így az egyenlet egyik gyöke $x_1 = -2 < 3$, az egyenlet másik gyöke, $x_2 = \frac{2}{m}$, nagyobb kell legyen 3-nál, így $m > 0$, $\frac{2}{m} > 3$, amiből $0 < m < \frac{2}{3}$.

5. A feladat sokféle módon megoldható. Egy lehetőség: Jelölje a két befogó hosszát a, illetve b. Mivel az átfogó $4\sqrt{10}$ egység, azért $a^2 + b^2 = 160$. Ahol a szögfelező metszi az átfogót, azon a ponton át az a hosszúságú befogóval (egyik befogóval) húzzunk párhuzamost. Ez a háromszögből hozzá hasonló háromszöget vág le. A megfelelő befogók arányából

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{b-3}{b}, \qquad 3(a+b) = ab.$$

Mivel $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, azért

$$(a+b)^2 - 6(a+b) - 160 = 0.$$

$a > 0$, $b > 0$ miatt $a + b = 16$ és $ab = 48$, tehát a két befogó hossza 4, illetve 12 egység.

6. A körök közös AB húrjának felező merőlegese (egyenlete $x+y = 9$) és az adott egyenes metszéspontja $C_1(25; -16)$ az egyik kör középpontja. Ennek az AB húr $F(5; 4)$ felezőpontjára való tükörképe, $C_2(-15; 24)$ a másik kör középpontja. A körök egyenlete: $(x-25)^2 + (y+16)^2 = 22^2 + 18^2$, illetve $(x+15)^2 + (y-24)^2 = 22^2 + 18^2$.

7. Azonos átalakításokkal

$$(x + 2\cos xy)^2 + 4\sin^2 xy = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $x + 2\cos xy = 0$ és $\sin xy = 0$. Ha $xy = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\cos xy = 1$, tehát $x_k = -2$, $y_k = -k\pi$; ha $xy = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\cos xy = -1$, tehát $x_k = 2$, $y_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$. (A feladat természetesen más módszerekkel is megoldható.)

8. Vegyük figyelembe, hogy

$$\left|x^2 - 6x\right| = x^2 - 6x, ha$$

3-$\sqrt{10} \leq x \leq 0$ vagy $6 \leq x \leq 7$, -x$^2 + 6x, ha0$<x<$6, s\left|x^2 - 6x + 8\right| = x^2 - 6x + 8, ha3$-$\sqrt{10} \leq x \leq 2$ vagy $4 \leq x \leq 7$, -x$^2 + 6x - 8, ha2$<x<$4. Ha3$-$\sqrt{10} \leq x \leq 0$, akkor $f(x) = 2(x-3)^2 - 10$, a legnagyobb értéke 10, a legkisebb értéke 8.
Ha $0 < x < 2$, akkor $f(x) = 8$.
Ha $2 \leq x \leq 4$, akkor $f(x) = -2(x-3)^2 + 10$, a legnagyobb értéke 10, a legkisebb értéke 8.
Ha $4 < x < 6$, akkor $f(x) = 8$.
Ha $6 \leq x \leq 7$, akkor $f(x) = 2(x-3)^2 - 10$, a legnagyobb értéke 22, a legkisebb értéke 8.

A függvény legnagyobb értéke 22, amit az $x = 7$ helyen vesz fel, a legkisebb értéke 8, amit akkor vesz fel, ha $0 \leq x \leq 2$ vagy $4 \leq x \leq 6$.

Rábai Imre