1. a) Ha $q=1$, akkor $2n=16$ és $\frac{1}{2}n=4$, azaz $n=8$, így a sorozat minden tagja 2.

Ha $q\neq 1$, akkor $16=2\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ és $4=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}$, azaz $\frac{q^n-1}{q-1}=8$ és $8=\frac{1}{q^{n-1}}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$, amiből $q^{n-1}=1$, $q^n=q$, tehát $\frac{q-1}{q-1}=8$, azaz ilyen sorozat nem létezik.

b) Ha $q=1$, akkor $n\cdot\frac{1}{2}=20$ és $2n=\frac{80}{27}$, azaz ilyen sorozat nem létezik.

Ha $q\neq 1$, akkor $20=\frac{1}{2}\frac{q^n-1}{q-1}$ és $\frac{80}{27}=2\cdot\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}$, azaz $\frac{q^n-1}{q-1}=40$ és $\frac{40}{27}=\frac{1}{q^{n-1}}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$, amiből $q^{n-1}=27$, $q^n=27q$, azaz $27q-1=40(q-1)$, $q=3$, és így $n=4$. A sorozat első négy tagja: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}$.

2. a) A háromszög területe Heron-képlettel kiszámítható. Most $2s=54,4$, $s=27,2$, tehát $T^2=27,2\cdot 1,7\cdot 5,1\cdot 20,4=69,36^2$, $T=69,36$ területegység.

b) Ismeretes, hogy a háromszög területe $T=\frac{abc}{4r}$, tehát a háromszög köré írható kör sugara $r=\frac{abc}{4T}$. Most $r=\frac{6,8\cdot 22,1\cdot 25,5}{4\cdot 69,36}=\frac{221}{16}=13,8125$ egység.

c) Ismeretes, hogy a háromszögbe írható kör sugara $\varrho=\frac{T}{s}$; most $\varrho=\frac{69,36}{27,2}=2,55$.

3. Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, a második egyenletből a harmadikat, és ezekhez társítsuk az első egyenletet. Ekkor rendezés után kapjuk:

$$(z-x)(2x+2z+1)=0, \quad (x-y)(2x+2y+1)=0 \quad \text{és} \quad x+y=2z^2.$$

Egyenletrendszerünk megoldásait a következő négy egyenletrendszer megoldásainak egyesítése adja:
a) $z=x$, $x=y$, $x+y=2z^2$;
b) $z=x$, $2x+2y+1=0$, $x+y=2z^2$;
c) $2z+2x+1=0$, $x=y$, $x+y=2z^2$;
d) $2z+2x+1=0$, $2x+2y+1=0$, $x+y=2z^2$.

Ezek közül csak az a) esetben adódik megoldás, és ezek az adott egyenletrendszernek is megoldásai. A megoldások: $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$ és $x_2=1$, $y_2=1$, $z_2=1$.

4. Vegyük figyelembe, hogy $\cos 75^\circ=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ és $\sin 75^\circ=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ és $\cos(x+75^\circ)=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x\right)$.

Írjunk az első, majd a második kifejezésbe a, b, c, illetve α, β, γ helyébe rendre b, c, a-t, illetve β, γ, α-t, ekkor a második kifejezést, illetve a

$$c^2+a^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)ca\cos(\beta+75^\circ)$$

kifejezést kapjuk, ami az első kettővel egyenlő, hiszen így mindhárom kifejezés a következő alakra hozható:

$$a^2+b^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)ab\cdot\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos\gamma-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin\gamma\right)=$$
$$=a^2+b^2-ab\cos\gamma+\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{2}\cdot\frac{ab\sin\gamma}{2}=$$
$$=a^2+b^2-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}+\left(4+2\sqrt{3}\right)\cdot T=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\left(4+2\sqrt{3}\right)T,$$

ahol T a háromszög területe.

5. Azonos átalakításokkal

$$f(x)=\left((\log_2 x-3)^2-9\right)^2.$$

A függvény legnagyobb értéke 81, amit az $x=8$ helyen vesz fel.

6. Jelölje a hitelt H, legyen $q_1=1+\frac{2,5}{100}=1,025$ és $q_2=1+\frac{2}{100}=1,02$. Az első, a második, illetve a harmadik hónap végén a tartozásunk

$$t_1=Hq_1-x, \qquad t_2=Hq_1^2-xq_1-x, \qquad t_3=Hq_1^3-x\frac{q^3-1}{q-1}=K,$$

ahol x a havi törlesztőrészlet.

A negyedik, az ötödik, illetve a hatodik hónap végén a tartozásunk

$$t_4 = Kq_2 - 2x, \qquad t_5 = Kq_2^2 - 2xq_2 - 2x, \qquad t_6 = Kq_2^3 - 2x\frac{q_2^3 - 1}{q_2 - 1}.$$

A feltétel szerint $t_6 = 0$, tehát

$$Hq_1^3q_2^3 - xq_2^3\frac{q_1^3 - 1}{q - 1} - 2x\frac{q_2^3 - 1}{q_2 - 1} = 0,$$

ahonnan

$$x = \frac{Hq_1^3q_2^3}{q_2^3\frac{q_1^3-1}{q_1-1} + 2\frac{q_2^3-1}{q_2-1}}.$$

A számolást elvégezve, az első három hónapban a törlesztés $x = 12\,177,4$ Ft, a második hónapban pedig $24\,354,8$ Ft volt.

7. A feltételeknek négy rombusz felel meg. A körök középpontjai rajta vannak az adott két oldalegyenes szögfelezőegyenesein, valamint az egyik egyenestől ϱ távolságban haladó (párhuzamos) egyeneseken. A szögfelezők egyenlete:

$$\frac{|x - y - 7|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + 7y - 31|}{5\sqrt{2}},$$

azaz

$$x - 3y = 1, \qquad \text{illetve} \qquad 3x + y = 33.$$

Az $x - y - 7 = 0$ egyenessel párhuzamos egyenesek egyenlete $x - y + k = 0$ alakban írható. Ezek közül a keresettek az $x - y - 7 = 0$ egyenletű egyenes bármely (pl. a $(7,\ 0)$) pontjától $2\sqrt{2}$ távolságra vannak, tehát

$$2\sqrt{2} = \frac{|7 + k|}{\sqrt{2}}, \qquad \text{azaz} \qquad k = -3 \quad \text{vagy} \quad k = -11,$$

így $x - y = 11$ vagy $x - y = 3$. Ezeknek az egyeneseknek a szögfelezőkkel való metszéspontjai a keresett körök középpontjai. Ezek $K_1(4;1)$, $K_2(9;6)$, $K_3(16;5)$, $K_4(11;0)$. A középpont és a sugár ismeretében a körök egyenlete felírható.

8. Az egyenletnek $x = 1$ nem lehet megoldása. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát, majd rendezzük:

$$x(x - 1 + 2p) = 0.$$

$x_1 = 0$ akkor gyöke az egyenletnek, ha $\sqrt{p^2} = p$, azaz ha $p \geq 0$.
$x_2 = 1 - 2p$ akkor gyöke az egyenletnek, ha $p \neq 0$ és

$$\sqrt{\left(2p - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} - 2p, \qquad \text{azaz} \qquad \left|2p - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} - 2p,$$

tehát $2p - \frac{3}{2} \leq 0$, $p \leq \frac{3}{4}$.

Az egyenletnek $0 < p \leq \frac{3}{4}$ esetén van két különböző gyöke.

Rábai Imre