Megoldás. Ismeretes, hogy ilyen mozgást végző test út–idő függvénye másodfokú polinom a szokásos jelölésekkel $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0$. A kérdés tehát az, hogy másodfokú polinom helyettesítési értékeivel mennyire tudjuk megközelíteni a táblázat adatait.

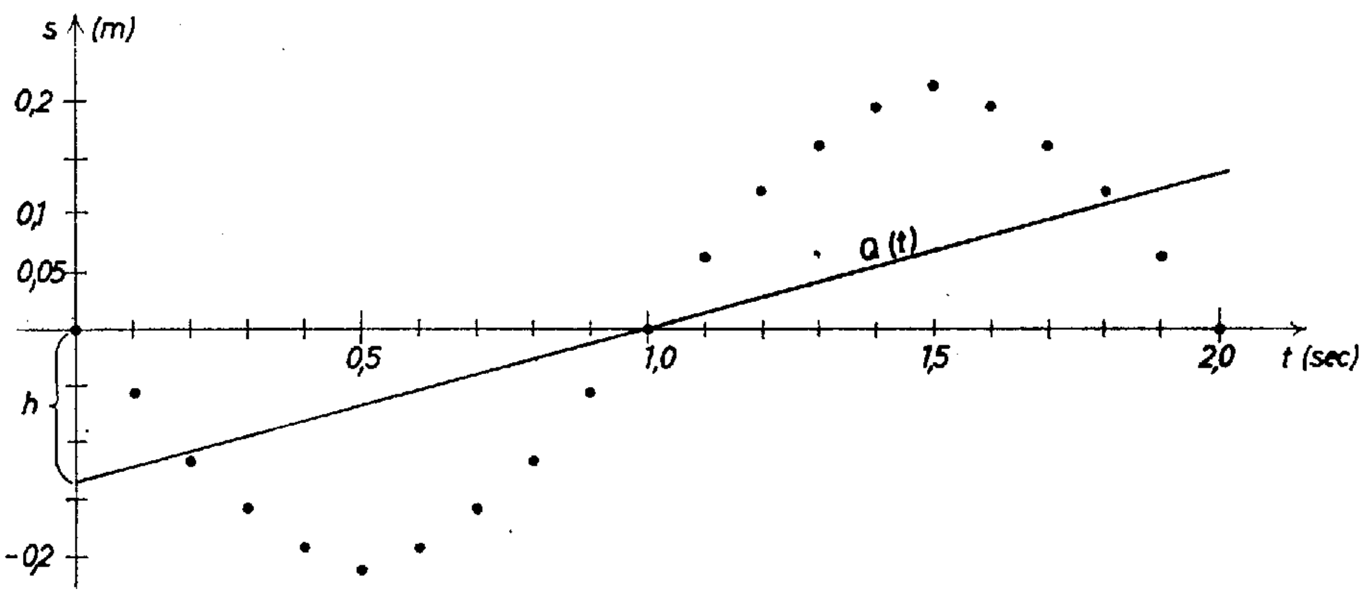
Ha a táblázat út–adataiból kivonjuk egy tetszőleges $P(t)$ másodfokú polinom értékeit, a kapott új táblázat adatait ugyanannyira lehet megközelíteni egy $Q(t)$ polinommal, mint az eredetit a $P(t) + Q(t)$-vel.

Olyan $P(t)$ polinomot szeretnénk találni, amelyet a táblázat értékeiből kivonva, a kapott új táblázat „szebb” lesz, könnyebben felismerhető lesz a jól közelítő $Q(t)$ polinom. Táblázatunkat nézegetve észrevehető, hogy a 2,0 s-hoz tartozó adat az 1,0 s-hoz tartozó 2-szeresénél 1-gyel nagyobb,

idő (s)	út (m)	idő (s)	út (m)	idő (s)	út (m)
0,0	0,0000	0,7	-0,1639	1,4	0,1922
0,1	-0,0627	0,8	-0,1196	1,5	0,2015
0,2	-0,1194	0,9	-0,0623	1,6	0,1928
0,3	-0,1641	1,0	-0,0000	1,7	0,1641
0,4	-0,1928	1,1	0,0623	1,8	0,1194
0,5	-0,2025	1,2	0,1196	1,9	0,0627
0,6	-0,1932	1,3	0,1639	2,0	0,0000

az idő négyzetének felét levonva belőlük, éppen 2-szerese lesz annak (0,637, ill. 1,274). Vonjuk le ezért a táblázatból a $P(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0{,}637\ t$ polinomot. A kapott különbségeket az új táblázat tartalmazza, ábrázoljuk is a pontokat koordináta–rendszerben. A kapott pontrendszer lényegében szimmetrikus az $(1;0)$ pontra $(2-2$ pontnál van 0,001 eltérés), ezért jól közelíthető egy, a szimmetriaközépponton áthaladó egyenessel. Az egyenes iránytangensét úgy határozzuk meg, hogy a $(0;0)$ és a $(0,6;\ -0{,}1932)$ pontokban azonos legyen a hiba (könnyen belátható, hogy ezen két pont esetén adódik a hiba a legnagyobbnak). A hibát h-val jelölve, hasonló háromszögekből felírható, hogy

$$\frac{0{,}1932 - h}{h} = \frac{0{,}4}{1},$$



amiből $h = 0{,}138$ adódik. Tehát az egyenes egyenlete $Q(t) = 0{,}138\ t - 0{,}138$, a mozgást közelítően leíró függvény $s^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0{,}775\ t - 0{,}138$ és a hiba minden pontban kisebb, mint 0,138.

Alsó becslést kapunk a hibára, ha csak a $t_1 = 0;\ t_2 = 0,6;\ t_3 = 1{,}4$ és $t_4 = 2{,}0$ abszcisszájú pontokhoz akarunk legjobban közelítő $f(t) = at^2 + bt + c$ másodfokú függvényt találni. Ezen $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ számokhoz (és általában tetszőleges ilyen szám–négyeshez) meghatározhatók a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ számok úgy, hogy teljesüljenek a

(1) $$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i t_i^n = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2$$

egyenlőségek. Ez három egyenlet a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ismeretlenekre. Bebizonyítható, hogy az egyenletrendszernek mindig van (végtelen sok) megoldása. Esetünkben $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = -2$ egy megoldás (a számolást nem részletezzük). Jelöljük s_i-vel a t_i-ben mért értéket, és legyen $\Delta_i = s_i - f(t_i)$, a t_i helyen a közelítés hibája. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i (s_i - a t_i^2 - b t_i - c) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i s_i - a \sum_{i=1}^{4} \lambda_i t_i^2 - b \sum_{i=1}^{4} \lambda_i t_i - c \sum_{i=1}^{4} \lambda_i. \tag{2}$$

(2)-ben az utolsó egyenlőség jobb oldalán álló 3 kivonandó tag (1) szerint 0, tehát

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i s_i.$$

Mindkét oldal abszolút értékét véve, és felhasználva, hogy az összeg abszolút értéke nem nagyobb a tagok abszolút értékeinek összegénél,

$$\left| \sum_{i=1}^{4} \lambda_i s_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \Delta_i \right| \le \sum_{i=1}^{4} |\lambda_i| \cdot |\Delta_i| \le \left(\max_{i=1,\ \ldots,\ 4} \Delta_i \right) \cdot \sum_{i=1}^{4} |\lambda_i|,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\max_{i=1,\ \ldots,\ 4} |\Delta_i| \ge \frac{\left| \sum_{i=1}^{4} \lambda_i s_i \right|}{\sum_{i=1}^{4} |\lambda_i|}. \tag{3}$$

A (3) képletet a kiválasztott pontnégyesre és a már meghatározott λ_i-kre alkalmazva nyerjük, hogy

$$\max_{i=1,\ \ldots,\ 4} |\Delta_i| \ge 0{,}1376.$$

Nyilvánvaló, hogy a teljes pontrendszert közelítő parabola hibája ennél csak nagyobb lehet. Viszont 0,138 hibával közelítő parabolát már találtunk, tehát kimondhatjuk, hogy az út mérési hibája legalább 0,138 egység. (Nincs értelme a 0,1376-hoz keresni parabolát – habár találnánk ilyet –, hiszen az eredeti adatok is csak 3 tizedes pontosságúak voltak.)