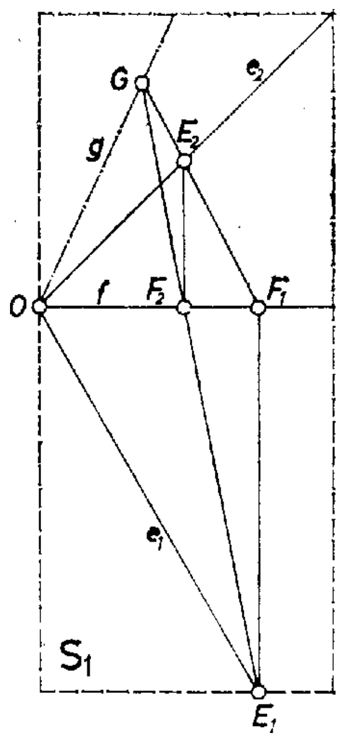
I. megoldás. Válasszuk a koordináta-rendszer origójának O-t, x tengelyének f-et, és jelöljük az E_1, E_2 pontok koordinátáit E_1 $(x_1,\ y_1)$, E_2 $(x_2,\ y_2)$-vel.



Mivel E_i vetülete az x tengelyen nem O, $x_i \neq 0$, és az $y_i/x_i = m_i$ hányados csak az e_i egyenes helyzetétől függ $(i = 1,\ 2)$. Az F_i pont koordinátái $F_i(x_i;\ 0)$, így F_1E_2 egyenlete

$$y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

F_2E_1 egyenlete pedig

$$y = \frac{y_1}{x_1 - x_2}(x - x_2).$$

E két egyenes egymást az

$$x_0 = \frac{y_1x_2 + y_2x_1}{y_1 + y_2}, \qquad y_0 = \frac{y_1y_2}{y_1 + y_2}$$

koordinátájú pontban metszi, ezek G koordinátái (tudjuk, hogy G létrejön). G tehát rajta van az

$$y_1y_2x = (y_1x_2 + y_2x_1)y$$

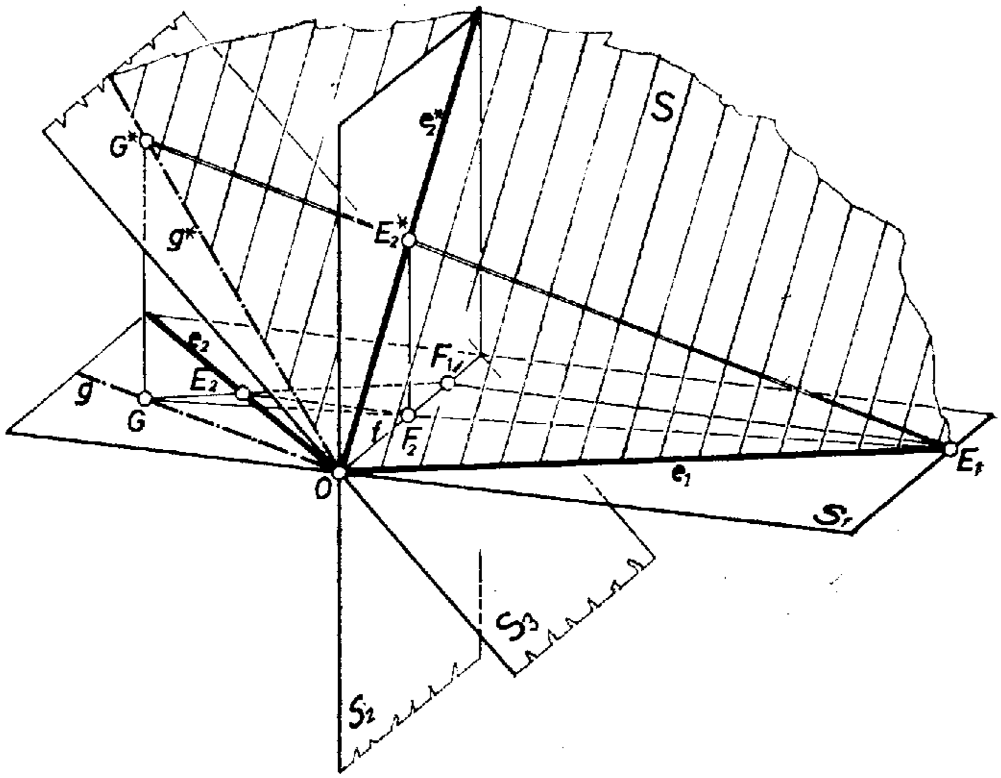
egyenletű egyenesen, ami más alakban ($x_1x_2 \neq 0$-val való osztás után)

$$m_1m_2x = (m_1 + m_2)y.$$

Ez valóban egyenes egyenlete, mert $m_1m_2 = m_1 + m_2 = 0$ csak $m_1 = m_2 = 0$ mellett lehet, amikor G nem jöhetne létre. Tehát OG egyenlete csak az e_1, e_2, f egyenesek helyzetétől függ, állításunkat ezzel igazoltuk.

Magyar Zoltán (Budapest, Jedlik Á. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás (vázlat). Jelöljük az egyenesek síkját S_1-gyel, és forgassuk el f körül $90°$-kal az e_2-vel és E_2-vel együtt, új helyzetüket jelöljük S_2-vel, e_2^*-gal, E_2^*-gal, a forgatás közben félúton kapott síkot S_3-mal.



Az E_1F_2, $E_2^*F_1$ egyenesek az $E_1E_2^*$ egyenes S_1, S_2-n levő vetületei, és – mint az könnyen látható – visszaforgatás után épp annak a G^*-nak az S_1-en levő vetületében metszik egymást, amelyben $E_1E_2^*$ metszi S_3-t. Ez viszont E_1 E_2, választásától függetlenül mindig rajta van S_3-nak és az e_1 e_2^* egyenesek által meghatározott S síknak a g^* metszésvonalán.