A természetben néha megfigyelhetünk olyan jelenségeket, melyek során sima, egyenletes alakzatokból periodikusan ismétlődő mintázatok, struktúrák alakulnak ki. A Balaton sekély, partmenti vizében a víz alatt a homokon szabályosan futó csíkrendszert, „hullámokat” figyelhetünk meg. Az egyenletesen fújó szélben a búzatábla bizonyos jellegzetes periódushosszal hullámzani kezd. A buszmegállók közelében a fékező nehéz járművek hatására az aszfalt periodikusan felgyűrődik, hullámossá válik.

Vajon mi okozza ezeket az első ránézésre meglepő, furcsa jelenségeket? Milyen körülmények között jönnek létre periodikus mintázatok és mi határozza meg az ismétlődések periódushosszát? Nem kívánjuk teljes általánosságban tárgyalni a kérdést, nem is állítjuk, hogy az összes ilyen jelenség mögött ugyanolyan mechanizmus rejtőzik (bár kétségtelen, hogy vannak hasonlóságok közöttük). Ehelyett kiválasztunk egy jelenséget, a címben szereplő problémát, s ezen mutatjuk meg, hogy milyen módszerekkel közelíthetünk meg ilyen kérdéseket. Nem törekszünk a legrészletesebb elméleti leírásra (ehhez felsőbb matematikai ismeretekre lenne szükség), de a jelenség lényegét enélkül is végiggondolhatjuk, s egy kevés, nem túl nehéz számolás után még becslés szintű számszerű eredményeket is nyerhetünk.

Sokan megfigyelték már, hogy a csapból kifolyó, kör keresztmetszetű, vékony, összefüggő vízsugár függőlegesen lefelé csurogva egyre jobban elvékonyodik, majd cseppekre szakad szét.[1]Lásd a 148. mérési feladatot a KöMal 1993. évi 4. számában. A vízszintesen kifeszített műanyagbevonatú ruhaszárító „kötélen” eső után egymástól többé-kevésbé egyforma távolságra gyülnek össze a vízcseppek.[2]Lásd a 174. mérési feladat ismertetését lapunk 253. oldalán. Hasonló periodicitást figyelhetünk meg a pókháló szálain is.

Saját magunk is létrehozhatunk egy sima folyadékszálból lenyűgöző látványt nyújtó „gyöngysort”, méghozzá nagyon egyszerűen, mindenféle segédeszköz nélkül — az emberi nyál felhasználásával! Az ujjunk végét megnyalva a mutató és a hüvelykujjunk között $2-3$ cm-es szálat feszíthetünk ki. A szálon — amely a nyál speciális anyagának köszönhetően viszonylag hosszú ideig fennmarad — néhány másodperc múlva szabályosan ismétlődő cseppecskék jelennek meg (*1. ábra*). A „gyöngysor” legjobban egy asztali lámpa oldalról érkező fényében figyelhető meg, sötét háttér előtt. Ha nagyítóval nézzük a folyadékszálat, azt is megfigyelhetjük, hogy a szálon a szomszédos cseppek között félúton kisebb cseppek is kialakulhatnak.

A gyöngysor létrejöttében a felületi feszültségnek nyilván fontos szerepe van, a nehézségi erő viszont elhanyagolható. Ez utóbbi állítást az a megfigyelés támasztja alá, hogy ha függőleges folyadékszálat hozunk létre, azon éppúgy megjelennek a cseppek, mint a vízszintes szálon.

Első tájékozódásként hasonlítsuk össze egy hengeres folyadékszál és az abból képződő cseppsor energiaviszonyait. Jelöljük a szál kezdeti sugarát r-rel, a cseppek távolságát (vagyis a cseppsor „hullámhosszát”) λ-val, az egyes cseppek sugarát R-rel, a folyadék felületi feszültségét pedig α-val (*2. ábra*)! Kezdetben a folyadék L hosszú darabjának energiája (amibe a szál vékonysága miatt csak a felületi energiát számoljuk bele, a helyzeti energiát nem vesszük figyelembe)

$$E_1 = \alpha \cdot 2\pi r \cdot L. \tag{1}$$

A szálon L/λ darab R sugarú csepp képződik, ezek (felületi) energiája

$$E_2 = \alpha \cdot 4\pi R^2 \cdot \frac{L}{\lambda}. \tag{2}$$

(A cseppek közötti vékony szálak felületét elhanyagoltuk a cseppek felületéhez képest.) A cseppek R sugarát az anyagmegmaradás törvénye határozza meg:

$$L \cdot r^2\pi = \frac{4R^3\pi}{3} \cdot \frac{L}{\lambda}. \tag{3}$$

A cseppképződés során a rendszer (felületi) energiájának csökkennie kell: $E_2 < E_1$. Az (1)–(3) összefüggések felhasználásával R kiküszöbölése után a hullámhosszra a

$$\lambda > \frac{9}{2} r \tag{4}$$

megszorítást kapjuk. Eszerint a cseppek nem akármilyen sűrűn, hanem csak egy bizonyos λ_{kr} kritikus értéknél ritkábban képződhetnek. Ez a kritikus hullámhossz a folyadékszál kezdeti sugarával arányosnak adódott.

A fenti megfontolásból csak annyit látunk, hogy mekkora az a kritikus hullámhossz, aminél ritkábban elhelyezkedő cseppek kialakulása összességében (vagyis a kezdeti és a végső helyzetet összehasonlítva) energianyereséggel jár. Egyáltalán nem biztos azonban, hogy a kezdetben hengeres szál *kicsiny* befűződése rögtön energianyereséghez vezet, enélkül pedig nem indulhat be a gyöngysor-képződés. Az sem világos még, hogy miért ugyanakkora távolságonként képződnek a cseppek, miért nem mindenféle, lehetőség szerint minél nagyobb távolságokban (hiszen minél nagyobb λ, annál több felületi energia szabadul fel).

Közelítsük meg a kérdést kicsit más oldalról! Tételezzük fel, hogy valamilyen ok miatt a kezdetben hengeres, r sugarú folyadékszál sugara periodikusan, λ hullámhosszúságú szinuszos függvénynek megfelelően megváltozik (*3. ábra*):

$$y(x) = r + \varepsilon \sin\frac{2\pi}{\lambda}x \qquad (\varepsilon \ll r) \tag{5}$$

[1] *
[2] **

lesz. (A folyadék összenyomhatatlansága miatt az átlagos sugárnak, r-nek is meg kell változnia egy kicsit, de ezzel most nem törődünk.) A megváltozott folyadékszál-alaknál a felületi feszültség miatt megváltozik a nyomás is a folyadék belsejében. A folyadék felszínének közvetlen közelében a nyomás a külső p_0 légnyomás és a görbületi nyomás összege lesz. Számítsuk ki, vajon a duzzadóhelynél, a *3. ábrán* látható A pontban, vagy pedig a B pontban, a szűkületnél lesz-e nagyobb a nyomás. Mivel a görbületi nyomás a kérdéses pontokban az ábra síkjában látható simulókörök ρ sugárából és az ábra síkjára merőleges $r \pm \varepsilon$ görbületi sugarakból számítható, azt kapjuk, hogy

$$p_A = p_0 + \alpha\left(\frac{1}{r+\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\right), \tag{6}$$

$$p_B = p_0 + \alpha\left(\frac{1}{r-\varepsilon} - \frac{1}{\rho}\right). \tag{7}$$

A cseppképződés megindulásának az a feltétele, hogy $p_B > p_A$ teljesüljön. Ekkor ugyanis a szűkületből — ott nagyobb lévén a nyomás — eláramlik a folyadék a duzzadóhelyek felé, s így a vékonyabb helynél még vékonyabb, a vastagabbnál pedig még vastagabb lesz a szál. A folyamat egészen addig tart, amíg ki nem alakulnak a cseppek, melyeket olyan vékony folyadékszál köt össze, melyben már nem képes átáramlani számottevő mennyiségű folyadék. Az (6) és (7) egyenletek különbségéből

$$0 < p_B - p_A = 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{r^2-\varepsilon^2} - \frac{1}{\rho}\right) \approx 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{r^2} - \frac{1}{\rho}\right) \tag{8}$$

adódik. Határozzuk még meg ρ értékét! Ezt elemi úton (differenciálszámítás felhasználása nélkül) a következőképpen tehetjük meg. Ha képzeletben végigviszünk egy tömegpontot a szinuszgörbe mentén úgy, hogy az x tengely menti sebessége v_0 legyen, y irányban pedig alkalmas frekvenciájú és amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást végezzen, akkor a test gyorsulását a szinuszfüggvény maximumhelyén kétféleképpen is kiszámíthatjuk: egyrészt a rezgőmozgás ismert gyorsulás-képletéből, másrészt a ρ sugarú körmozgás centripetális gyorsulásának képletéből.[3]Lásd részletesebben az **FN. 2767.** feladat megoldásánál a KöMaL 1994. évi 4. számában! A kétféle eredmény összevetéséből kapjuk, hogy

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2. \tag{9}$$

Helyettesítsük be ezt a görbületi sugarat a cseppképződés (8) feltételébe, ekkor a

$$\lambda > \lambda_{kr} = 2\pi r \tag{10}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezt a feltételt, ami erősebb, mint az energetikai megfontolásokból kiszámított (4) egyenlőtlenség, először *Joseph A. F. Plateau* (1801–1883) belga fizikus, a felületi hártyák első alapos tanulmányozója vezette le. Megmutatta, hogy az olyan hullámoknál, melyek hullámhossza kisebb, mint a szál kerülete, a szűkületnél kevesebbet csökken a folyadék felszíne, mint amennyivel a duzzadóhelyeknél növekszik, így az egész rendszer felületi energiáját a hullámok növelik. Az egyensúly az energetikailag kedvezőbb hengeres alakzat lesz, ehhez tér vissza a folyadék a zavar csillapodása után. Ha viszont teljesül (10), akkor a hullámok amplitúdójának növekedtével egyre csökken a felületi energia, a hullám emiatt egyre nagyobb lesz, míg végül — a hullámhossznak megfelelő távolságban — kialakulnak a cseppek.

Mi okozza a hengeres felület kezdeti hullámosságát? Mekkora hullámhosszúságú zavarok fordulnak elő a valóságban, és egyáltalán: miért gondoljuk, hogy a zavar éppen szinuszos alakú? Ha többféle hullámhosszúságú zavar is megjelenik, melyik válik meghatározóvá, melyiknek a hullámhossza szabja meg a cseppek távolságát? Ezekre a kérdésekre keressük a választ a továbbiakban.

A folyadékszál alakja természetesen kezdetben sem tökéletes henger. Ha valamilyen véletlen folytán egy adott pillanatban mégis az lenne, az elkerülhetetlenül jelen levő kicsiny külső zavarok (gyenge légmozgások, a gravitáció kicsiny, de mégsem nulla hatása, vagy a külső környezetből érkező zajok, zörejek) óhatatlanul eltorzítják a felület alakját. Igaz ugyan, hogy ez a torzulás nem egy bizonyos hullámhosszúságú szinuszos hullám, de — mint azt *Jean B. J. Fourier* (1768–1830) francia matematikus megmutatta — a függvények meglehetősen tág osztályába tartozó *bármely* függvény felbontható szinusz- és koszinusz függvények összegére. Mindaddig, amíg a felület eltérése a kiindulási alaktól nem túl nagy, az egyes tisztán szinuszos (koszinuszos) összetevők, az úgynevezett Fourier-komponensek, egymástól függetlenül „élik életüket”, vagyis mindegyikük időbeli változása olyan, mintha a többi komponens ott sem lenne. Ez a matematikai tétel teszi lehetővé, hogy a korábbi — egyetlen Fourier-komponensre vonatkozó | megfontolásaink eredményéből kiolvashassuk a *legáltalánosabb eset* lefolyását is.

A külső zavarok általában mindenféle frekvenciájú (mindenféle hullámhosszúságú) Fourier-összetevőt tartalmaznak, s az egyes összetevők nagyjából (nagyságrendileg) egyforma erősek. (Természetesen szándékosan ki lehet emelni egy-egy frekvenciát, például úgy, hogy egy megpendített hangvillát helyezünk el a folyadékszál közelében. Az ellenkező végletet, amikor mindegyik összetevő átlagosan ugyanolyan erős, a fehér fényre utalóan „fehér zajnak” nevezik.)

[3]***

A görbületi nyomásra vonatkozó korábbi megfontolások szerint a $2\pi r$-nél rövidebb hullámhosszú zavarok nem erősödnek, hanem időben periodikusan váltakozva a belső súrlódás (viszkózitás) miatt fokozatosan elhalnak. A szál kerületénél hosszabb hullámhosszú zavarok — mint láttuk — önmagukat erősítik, és ez cseppképződéshez vezet. Nem mindegy azonban, hogy milyen gyorsan játszódik le ez az öngerjesztő folyamat. Amelyik hullámhosszhoz tartozó Fourier-komponensnek *leggyorsabb* a növekedési üteme, az mintegy legyőzi a többit, s a saját hullámhosszának megfelelő távolságonként cseppekre szabdalja a folyadékszálat. Biológiai hasonlattal élve a legéletrevalóbb (leggyorsabb ütemben növekedő) komponens „természetes kiválasztódással" a többiek fölé kerekedik, saját előnyére változtatja meg a környezetét és ezzel végleg elveszi a többi vetélytárs felzárkózási esélyét.

Ha elemi eszközökkel nem is tudjuk teljes pontossággal kiszámítani a leggyorsabban növekvő komponens hullámhosszát, nagyságrendileg egészen jó becslést adhatunk erre a mennyiségre. A (6), (7) és (9) képleteket felhasználva látjuk, hogy a $\lambda/2$ félhullámhossznyi folyadékdarabkára, vagyis egy szűkület és egy duzzadóhely közötti részre ható eredő erő

$$F = (p_B - p_A)\cdot r^2\pi = 2\alpha\varepsilon\pi\left[1-\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2\right] \tag{11}$$

nagyságú. Ennek az erőnek

$$m = r^2\pi\cdot\frac{\lambda}{2}\cdot\rho_f \tag{12}$$

tömeget kell megmozgatnia valamekkora (átlagos) a gyorsulással. (ρ_f a folyadék sűrűsége.) $F = ma$, ahonnan $a = F/m \sim \varepsilon$. Látjuk, hogy a gyorsulás arányos a kitéréssel, s az arányossági tényező (ellentétben a Hooke-törvénnyel) pozitív. A felgyorsulás ütemét az a/ε arány, vagyis az egységnyi hullámamplitúdóhoz tartozó gyorsulás értéke (inflációs ráta) jellemzi. Ha λ csak egy kicsivel nagyobb, mint a $\lambda_{kr} = 2\pi r$ kritikus hullámhossz, akkor kicsi a nyomáskülönbség, kicsi erő hat a folyadékdarabkára. Ha $\lambda \gg \lambda_{kr}$, akkor nagy ugyan az erő, de megmozgatandó tömeg is nagyon nagy, sok folyadéknak kell átrendeződnie a cseppek kialakulásához, emiatt válik lassúvá a folyamat. Az optimális hullámhosszat az

$$f(\lambda) = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{2\alpha}{\rho_f r^3\pi}\left[1-\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) = K\cdot u(1-u^2) \tag{13}$$

függvény szélsőértéke adja meg, ahol $u = 2\pi r/\lambda$, K pedig egy állandó.

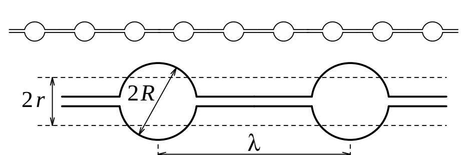
Az $f(u) = K\cdot u(1-u^2)$ függvénynek — mint az differenciálással, grafikus vizsgálattal, vagy egyszerűen néhány pontbeli függvényérték numerikus kiszámításával megkapható — $u = 1/\sqrt{3} \approx 0,6$ értéknél lokális maximuma van (*4. ábra*). Eszerint a leggyorsabb ütemben erősödő, a „nyerő" zavar hullámhossza

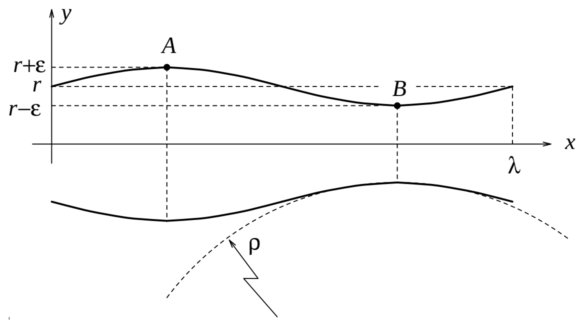
$$\lambda_{nyer} \approx \frac{2\pi r}{0,6} \approx 10r. \tag{14}$$

Az itt ismertetett vázlatos, becslés jellegű megfontolásoknál lényegesen pontosabb, a folyadék áramlását részleteiben leíró számítást végzett *John W. S. Rayleigh* (1842–1919) Nobel-díjas angol fizikus. Azt találta, hogy elhanyagolható belső súrlódású folyadékból kialakult hengeres szál akkor a leginkább instabil, vagyis a zavar akkor növekszik rajta a leggyorsabban, ha a hullámhossz kb. a kerület 1,5-szerese, pontosabban ha $\lambda = 9,02r$. (Látható, hogy a fentebb leírt durva becslés eredménye nincs túl messze a pontosabb értéktől.) Az is megkapható, hogy a folyadék viszkózitásának figyelembe vétele a kritikus hullámhossz nagyságát a nagyobb értékek felé tolja el. Eszerint a viszkózusabb folyadékoknál (paraffinolaj, glicerin) nagyobb távolságokban várható a cseppek kialakulása, mint a víznél.

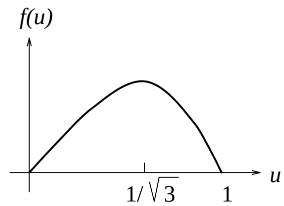
Cikkünk bevezetőjében felsorolt mintázatképződési jelenségek és a részletesen tárgyalt cseppképződés között annyi a kapcsolat, hogy azok is a külső zavarok Fourier-összetevőinek vizsgálatával, a sok instabil komponens közül a „nyerő" (leggyorsabb ütemben felerősödő) komponens kiválasztásával érthetők meg. A matematikai leírásmód „nyelve" a közös ezekben a fizikailag meglehetősen távoli jelenségekben.

Gnädig Péter





y
A
r+ε
r
B
r−ε
x
λ
ρ



f(u)
u
1/√3
1