[1]A versenyről szeptemberi számunk 337. oldalán olvashattak.

I. évfolyam

1. a) Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor $\dfrac{7n-1}{4}$ és $\dfrac{5n+3}{4}$ nem lehetnek egyszerre egész számok.
b) Hány olyan 1996-nál kisebb n természetes szám van, amelyre a $\dfrac{4n+3}{13n+2}$ tört egyszerűsíthető?

2. A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\{x^2-4y+3=0, y^2-4z+3=0, z^2-4x+3=0.$$

3. Melyek azok az f, g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények, amelyekre $f(x)+f(g(x)) = x+y$, bármely x, $y \in \mathbf{R}$ esetén?

4. Adott egy szabályos 17-oldalú sokszög. Bármely két csúcsát összekötjük egy piros, kék vagy zöld szakasszal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek azonos színű oldalai vannak.

5. Az ABC háromszögben a B és C szögek belső szögfelezőinek talppontját B', C'-vel, a külső szögfelezők metszéspontját I_a-val, míg a háromszög köré írható kör középpontját O-val jelöljük. Igazoljuk, hogy $I_aO \perp B'C'$.

6. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög, $M \in \operatorname{Int}(ABC)$, valamint N és P az M vetületei az AB és AC odalakra, és D a BC oldal felezőpontja. Igazoljuk, hogy $MN \cdot AC = MP \cdot AB \iff BAM\sphericalangle = DAC\sphericalangle$.

II. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$1996 \mid 2557^{2n+1}+1559^{2n+1}-4054^{2n+1}-62^{2n+1}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x) \le 1 \le \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\cdot\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg} x).$$

3. Minden $n \ge 1$ egész számra határozzuk meg azt a legnagyobb értéket, amelyet az a szorzat vehet fel, amely szorzat tényezői egészek és a tényezők összege n.

4. Helyezzünk el n pozitív számot egy kör kerületén úgy, hogy egy kivételével mindegyik a vele szomszédos két szám mértani és számtani középarányosa által meghatározott zárt intervallumban legyen. Határozzuk meg a számokat, ha ismerünk egyet közülük!

5. Az ABC háromszögben az A szög belső szögfelezője a háromszög köré írt kört A_1-ben metszi. Hasonlóan kapjuk a B_1, C_1 pontokat. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{Ter}[BA_1C]+\operatorname{Ter}[CB_1A]+\operatorname{Ter}[AC_1B]=p(R-r), (1)\frac{a^2}{-a+b+c}+\frac{b^2}{a-b+c}+\frac{c^2}{a+b-c}=\frac{2p}{r}(R-r).(2)$$

(Itt $\operatorname{Ter}[XYZ]$ az XYZ háromszög területét jelöli.)

6. Legyen M egy olyan pont a térben, amelynek az $ABCD$ tetraéder AB, BC, CD és DA éleire eső M_1, M_2, M_3 és M_4 vetületei az illető szakaszok belső pontjai. Számítsuk ki az $aM_1A+bM_2B+cM_3C+dM_4D$ összeget (ahol a, b, c és d-vel az AB, BC, CD és DA élek hosszát jelöltük).

III. évfolyam

1. Igazoljuk, hogy $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{1996}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{1996}$ pozitív egész szám, és adjuk meg a szám utolsó számjegyét.

2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^y-x=y^x-y$ egyenletet.

---

[1]*

3. Legyen az ABC háromszög AC oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja D, BC oldalának felezőpontja E. Az $ABED$ négyszögről tudjuk, hogy húrnégyszög és egyben érintőnégyszög is. Jelölje R az ABC háromszög körülírt körének sugarát, és r az $ABED$ négyszög beírt körének sugarát. Határozzuk meg az $\frac{R}{r}$ hányados pontos értékét.

4. Igazoljuk, hogy ha az ABC hegyesszögű háromszögben $a = B$ és $b = A$, akkor $c \leq A \cdot C$ (a, b, c a háromszög oldalainak hossza, A, B, C a háromszög szögeinek mértékei radiánban).

5. Egy $6n \times 6n$ ($36n^2$ négyzetet tartalmazó) négyzetes táblára két játékos felváltva 2×2-es négyzeteket rak, amelyek nem fedik egymást (egy ilyen négyzet négy mezőt takar). Az veszít, aki már nem tud rakni.
a) Legalább hány lépés után fejeződhet be a játék?
b) Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?

6. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderben G_i-vel jelöljük az A_i-vel szemben fekvő lap súlypontját. Ha egy térbeli M pont esetén $3MG_i = MA_i$ bármely $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$-re, igazoljuk, hogy akkor M a tetraéder súlypontja.

IV. évfolyam

1. Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = AC$) az AB és AC szárakon felvesszük a $D \in (AB)$, illetve $E \in (AC)$ pontot úgy, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{Ker}\,(ADE)}{\mathrm{Ker}\,(ABC)}\right)^2 = \frac{\mathrm{Ter}\,(ADE)}{\mathrm{Ter}\,(ABC)}.$$

(Ker (XYZ) az XYZ háromszög kerületét jelöli.) Igazoljuk, hogy DE párhuzamos BC-vel.

2. Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek számát:

$$A_n = \{(x,\ y) | x \neq y \in \mathbf{N},\ x,\ y \in [F_n,\ F_{n+2}] \ \text{ és } \ \exists k \in \mathbf{N} : x + y = F_k\}$$

bármely rögzített n természetes szám esetén (F_n a Fibonacci sorozat n-edik tagja, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ha $n > 1$.)

3. Mennyi maradékot kapunk, ha az $n^{n+1} + (n+1)^n$ természetes számot elosztjuk $n(n+1)$-gyel?

4. Legyen $P(x)$ egy valós együtthatójú, n-edfokú polinom. Igazoljuk, hogy a $P(P(P(x))) = 0$ egyenletnek nem lehet egy pontosan $(n^3 - n^2 + 1)$-szeres gyöke.

5. Egy körvonalat 30 ponttal 30 ívdarabra osztottunk fel úgy, hogy az ívdarabok közül 10-nek a hossza 1, 10-nek a hossza 2, és 10-nek a hossza 3. Bizonyítsuk be, hogy a felvett osztópontok között van legalább kettő, amelyek átmérősen ellentettek (egy átmérő két végpontja).

6. Adott az $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ folytonos függvény úgy, hogy

$$(f \circ f)(x) = \sqrt[n]{(x+1)^n + 1} \qquad (n \geq 2).$$

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.