

¹B. Cavalieri (1598–1647) a bolognai egyetem tanára volt.

„Helytelen a következő, Cavalieri-féle elvnek mondott kijelentés: ha két testnek egy síkkal párhuzamos metszetei páronként egyenlő területűek, akkor a két test térfogata egyenlő. Ebből a következtetésből még a *térfogat létezése sem következik.*” (idézet Hajós György: Bevezetés a geometriába c. könyv 227. oldaláról.)

Erre fogunk most egy példát mutatni. (A konstrukció Pósa Lajostól származik.)

Vegyünk két egységkockát. Az egyiket hagyjuk meg olyanak, amilyen.

A másikat a következőképpen alakítsuk át: jelöljük B -vel azokat a négyzetlap síkmetszeteket a kockában, amelyek racionális távolságra vannak a kocka kiszemelt alapsíkjától, a többi lapot, vagyis az irracionális távolságra levőket pedig jelöljük J -vel. Most képzeletben fogjuk meg bal kezünkkel a B , jobb kezünkkel a J jelű lapokat; mint ahogyan a krupie összetolja a kártyalapokat, mi húzzuk szét a négyzetlapjainkat annyira, hogy a bal oldalon levő lapok éppen ne legyenek a jobb oldali lapok fölött vagy alatt. Tekintsük most az egységkockát és az általunk konstruált ponthalmazt (1. ábra). Mindkettőt az előzőekben kijelölt alapsíkra állítva, az alapsíkkal párhuzamos síkmetszetek egyenlő területűek, de az elsőnek a térfogata 1, míg az általunk konstruált halmaznak nincs térfogata. A térfogat azért nem létezik, mert a ponthalmazba írható téglatest-rendszerek összetérfogatának felső határa nem egyezik meg a lefedő téglatest-rendszerek térfogatának alsó határával. Előbbi 0, utóbbi 2.

Hajós György könyvében található a következő, most már pontos tétel két test térfogatának egyenlőségére:

„Ha két test úgy helyezkedik el egy féltérben, hogy a féltér határsíkja által tartalmazott lapjainak s a határsíkkal párhuzamos síkok által kivágott metszeteiknek van területük, és ezek páronként egyenlők, hogy továbbá mindkét testhez található egy-egy egyenes, amellyel párhuzamos egyeneseknek a testhez tartozó pontjai (amennyiben ilyenek vannak) egy, a féltér határsíkján végződő szakaszt alkotnak, akkor a két testnek van térfogata és térfogatuk egyenlő.”

A tételben szereplő feltételeket gyengíthetjük, ha nem kíanjuk meg, hogy a testeknek legyen közös lapjuk a határsíkkal, és csak annyit követelünk meg, hogy létezzen egy-egy olyan, a határsíkkal nem párhuzamos irány, amellyel párhuzamos egyeneseknek a testekkel közös része egyetlen szakasz. Ez a feltétel biztosítja a térfogat létezését. Természetes, hogy ellenpéldánk ilyen feltételek mellett már nem működik.

A gömb térfogatának meghatározása e tétel segítségével szintén megtalálható Hajós György könyvében (l. 240. o.). Ehhez nagyon hasonló gondolatmenettel oldjuk meg a következő feladatot.

1. feladat. *Vegyünk két R sugarú, egymást merőlegesen metsző végtelen egyenes körhengert. Határozzuk meg a közös rész térfogatát.*

Megoldás. Vegyük a hengerek tengelyei által meghatározott Σ síkot. Σ szimmetriasíkja a hengereknek, illetve a közös résznek, tehát annak térfogatát felezi. A metszet felének a felülete az építészetből jól ismert *kolostor boltozatnak* nevezett alakzat. Ha a Σ -tól x távolságban levő párhuzamos síkkal elmetsszük a hengereket, akkor a metszetek azonos szélességű végtelen sávok. A sávok merőlegesek egymásra, ezért metszetük négyzet. A négyzet területe $4(R^2 - x^2)$. Keressünk egy olyan testet, amelynek a megfelelő metszetei ugyanilyen területűek, és a térfogatát könnyű meghatározni. $4R^2$ -nyi terület adódik egy $2R$ oldalú négyzetes hasáb alappal párhuzamos metszeteként, $4x^2$ -nyi terület pedig olyan $2R$ alapélű R magasságú négyzetes gúla alappal párhuzamos metszeteként, amelynek a távolsága a gúla csúcsától x . Mindez annak a középpontos hasonlóságnak a következménye, amelynek középpontja a gúla csúcsa, aránya pedig $x : R$. Ha gúlánkat fejtetőre állítva kivesszük egy R magasságú, $2R$ alapélű négyzetes hasábból (mint léket a dinnyéből), akkor a keresett testhez jutottunk.

A Cavalieri-elv feltételei teljesülnek, ha a Σ síkra állítjuk az előzőekben konstruált testet, és a metszetnek ugyanabban a féltérben levő felét tekintjük (2. ábra). A Σ -val párhuzamos metszetek egyenlő területűek, a tételben követelt irány a Σ -ra merőleges, így a térfogat létezése is igazolt, bár ez a metszet térfogatának létezéséből is következik. Így a metszet térfogata $16R^3/3$, nem feledkezve meg arról, hogy csak a metszet felére alkalmaztuk a Cavalieri-elvet. Hasonlóan számolhatjuk a közös rész térfogatát abban az esetben is, ha a tengelyek valamely derékszögtől különböző szöget zárnak be egymással, de ekkor is követelmény az, hogy a tengelyek messék egymást, és a sugarak egyenlők legyenek.

A következő feladatnak szintén van építészeti vonatkozása, mert a jól ismert *keresztboltozat* alatti térfogat is számolható a segítségével.

2. feladat. *Adott két R sugarú, $2R$ alkotójú egyenes körhenger. Tengelyeik merőlegesen metszik egymást a felezőpontjaikban. Számítsuk ki az egyesítésükkel keletkezett test (uniójuk) térfogatát.*

Megoldás. A két henger összetérfogatából kivonva a közös rész térfogatát, megkapjuk a keresett test térfogatát. A közös rész térfogatát az 1. feladatban már meghatároztuk. Így a következő eredmény adódik: $R^3(4\pi - 16/3)$.

Intelligencia tesztekben és építészeti, művészettörténetes felvételi vizsgáin lehet találkozni a következő problémához hasonló feladatokkal, amelyeket az ábrázoló geometriában rekonstrukciónak hívnak: Megadják egy test három egymásra merőleges vetületét vagy árnyékát, és kéri, hogy a vetületekből vagy árnyékokból rajzoljuk meg, vagy a megadott válasz lehetőségek közül válasszuk ki a test axonometrikus vagy perspektív képét. (Az előbbi jóval nehezebb.) Egy ilyen probléma a következő: Egy test három egymásra merőleges árnyéka rendre: téglalap, egyenlőszárú háromszög és kör (4. ábra). Mi ez a test?

Érdemes a megoldásra egy kis időt szánni. Nem könnyű a feladat. Ha egy R sugarú végtelen egyenes körhengert elmetsszünk két, a tengelyét merőlegesen metsző egyenesre illeszkedő síkkal, amelyek egyenlő, mondjuk 45° -os szöget

zárnak be a tengellyel, és egy a tengelyre merőleges síkkal, amely az előbbi síkok metszévonalától R távolságra van, akkor egy csavarhúzó végéhez hasonló testet kapunk, amelynek árnyékai éppen a felrajzoltak.

3. feladat. Számítsuk ki e test térfogatát (5. ábra).

Megoldás. A 2. feladatban leírt test négy „csavarhúzóból” áll, úgy, hogy $2R$ hosszú éleiket egymáshoz illesztjük. A térfogat tehát az előző feladatban szereplő test térfogatának negyede, azaz $R^3(\pi - 4/3)$.

Érdekes tulajdonságú felület a következő: vegyünk egy $ABCD$ szabályos tetraédert, melynek AB élén kijelölünk egy tetszőleges X pontot és CD élén egy Y pontot, úgy, hogy $AX = CY$. Ha X befutja az AB élet, akkor az XY szakasz egy felületet ír le. Az így kapott felület egy hiperbolikus paraboloid része. Ez a felület különleges tulajdonságokkal rendelkezik. A felületen egyenes, hiperbola és parabola seregek találhatóak. Az $ABCD$ tetraéderből, a BC és az AD élek elhagyásával az $ABDC$ torznégyszöget kapjuk (6. ábra).

Ha egy ilyen torznégyszög alakú keretet szappanos vízbe mártunk, akkor az előbbi felületet kapjuk a keret élei között; ez egy fizikai alátámasztása annak a ténynek, hogy ez a keretre illeszthető felületek közül a legkisebb felszínű. Ez a felület is elterjedt századunk építészetében. Nevezzük felületünket nyereglapnak, mert hasonló a négyzet alakú lópokróchoz, amelynek átlóját a ló gerincére illesztve a nyereg alá tesznek.

4. feladat. Adott az $ABCD$ tetraéder, valamint az $ABDC$ torznégyszöghöz illeszkedő nyereglap. Határozzuk meg az ABC , BCD lapok, valamint a nyereglap által meghatározott test térfogatát.

Megoldás. Vegyünk egy az AC , BD egyenesekkel párhuzamos S síkot. Az S -sel párhuzamos síkok testünket XZY derékszögű háromszögekben metszik. Ugyanis XZ párhuzamos AC -vel és YZ párhuzamos BD -vel, de AC és BD merőlegesek, ezért XZ és YZ is merőlegesek egymásra. Egy ilyen derékszögű háromszögnek a területe fele azon téglalap területének, amelyet az S -sel párhuzamos sík az $ABCD$ tetraéderből metsz ki. Jelöljük A' -vel AC felezőpontját! Az $A'BCD$ tetraéder S síkkal párhuzamos síkmetszetei már egyenlő területűek a vizsgált testünk síkmetszeteivel (7. ábra). A Hajós-féle tételben követelt egyeneseket nem tudunk megadni, mivel a testeknek nincs olyan lapja, amely párhuzamos S -sel. A tétel után tett megjegyzésben követelt egyenes viszont létezik, ilyen az S -re merőleges egyenes. Mivel az $A'BCD$ tetraéder térfogata fele az eredeti tetraéder térfogatának, ezért a nyereglap által határolt test térfogata is a tetraéder térfogatának fele, azaz $\sqrt{2}a^3/12$, ahol a az eredeti szabályos tetraéder élhossza.

Ezt a feladatot egy ügyes transzformációval (az eredmény ismeretében) már egyszerűbben is megoldhatjuk. Keresendő olyan egybevágósági transzformáció, amely a nyereglapot helyben hagyja, az ABC , BCD lapokat pedig a BAD , ADC lapokba viszi át. Az AB és CD élek felezőpontját összekötő egyenesre való tükrözés e kívánalmaknak éppen megfelel. Ha erre az egyenesre tükrözzük testünket, akkor az egy vele egybevágó testbe megy át, és a két test együtt az eredeti tetraédert adja. Térfogatuk tehát a tetraéder térfogatának a fele.

Nagy Gyula

Budapest, Ybl Miklós Műsz. Főisk.





