

$$1. f_1(x) = x^2 - 9x - 22 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} = (x - 11)(x + 2).$$

$f_1(x)$ értelmezési tartománya: $f_1(x)$ értékkészlete: $f_1(x) \geq -\frac{169}{4}$ és $f_1(x) \in \mathbf{R}$.

$f_2(x)$ értelmezési tartománya: $x \in \mathbf{R}$. $f_2(x)$ értékkészlete: $f_2(x) \geq 0$ és $f_2(x) \in \mathbf{R}$.

$f_3(x)$ értelmezési tartománya: $x \leq -2$ vagy $11 \leq x$. $f_3(x)$ értékkészlete: $f_3(x) \geq 0$ és $f_3(x) \in \mathbf{R}$.

$f_4(x)$ értelmezési tartománya: $x < -2$ vagy $11 < x$. $f_4(x)$ értékkészlete: $f_4(x) \in \mathbf{R}$.

2. Legyen a két gyök r_1 és r_2 . Ekkor

$$A_1 + A_2 = 6\pi r_1^2 + 6\pi r_2^2 = 6\pi (r_1^2 + r_2^2) = 6\pi [(r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2] = 6\pi(100 - 2 \cdot 21) = 348\pi, V_1 + V_2 = 2\pi r_1^3 + 2\pi r_2^3 = 2\pi (r_1^3 + r_2^3)$$

Felhasználtuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggést, aminek alapján $r_1 + r_2 = 10$, $r_1 \cdot r_2 = 21$.

3. Az értelmezési tartomány: $x \geq -1$. Egy egyenlőtlenségnek mind a két oldalát pozitív mennyiséggel szorozhatjuk. Szorozzunk a következő kifejezéssel:

$$(\sqrt{x+1} + 2) \cdot (\sqrt{x+3} + 3) \cdot (\sqrt{x+5} + 4),$$

ami biztosan pozitív. Háromszor alkalmazva az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ összefüggést, kapjuk:

$$(x+1-4)(x+3-9)(x+5-16) \geq 0, (x-3)(x-6)(x-11) \geq 0.$$

Az előjel viszonyokat számegyenesen ábrázolhatjuk. A megoldás: $3 \leq x \leq 6$ vagy $11 \leq x$. Ezek az értékek az értelmezési tartományban is benne vannak.

4. Az a egyenes normálvektora $(2; 1)$, a b egyenesé $(-1; 2)$, vagyis a háromszög (ha létezik), akkor derékszögű. Az a és b egyenesek egyenleteiből kapjuk: $B(-6; 3)$, a b és a c egyenesek egyenleteiből kapjuk: $A(2; -3)$. Az AB szakasz felezőpontja $F(-2; 0)$. A köré írt kör sugara: $r = \frac{AB}{2} = 5$. A kör egyenlete: $(x+2)^2 + y^2 = 25$.

Tudjuk, hogy $t = \frac{ab}{2}$ (derékszögű háromszög), valamint $t = r_0 s$, ahol r_0 a beírt kör sugara, s pedig a félkerület. Az a és b metszéspontjait kiszámolva: $C(-2; -5)$. Két pont távolsága számolható, ha adottak a koordináták: $AC = b = 2\sqrt{5}$, $BC = a = 4\sqrt{5}$, $AB = c = 2r = 10$. Így $s = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 3\sqrt{5}$, $t = \frac{ab}{2} = 20$, vagyis $r_0 = \frac{20}{5 + 3\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - 5$.

5. Tegyük az S, Z, L pontokat derékszögű koordináta-rendszerbe oly módon, hogy $S(-1; 0)$, $L(1; 0)$ legyen, $Z(x, y)$ pedig a mozgó pont. Ekkor $s^2 = SZ^2 = (x+1)^2 + y^2$, $l^2 = LZ^2 = (x-1)^2 + y^2$. Tudjuk, hogy $2s^2 + 4 = l^2$, vagyis $2[(x+1)^2 + y^2] + 4 = (x-1)^2 + y^2$. Rendezve: $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$, ami $(x+3)^2 + y^2 = 4$.

A Z pontok egy meghatározott körön helyezkednek el. A gondolatmenetet megfordítva beláthatjuk, hogy a körnek minden pontja eleget tesz a feltételeknek.

6. Mivel $-17 \sin^2 x = \sin^2 x - 18 \sin^2 x$, ezért az egyenletet felírhatjuk a következő alakban:

$$36 \sin^4 x - 12 \sin^3 x + \sin^2 x - 18 \sin^2 x + 3 \sin x + 2 = 0, \text{ azaz} \\ (6 \sin^2 x - \sin x)^2 - 3(6 \sin^2 x - \sin x) + 2 = 0,$$

amiből $6 \sin^2 x - \sin x = 1$, illetve $6 \sin^2 x - \sin x = 2$. Ezeket az egyenleteket megoldva a következő értékeket kapjuk $\sin x$ -re:

$$-\frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad -\frac{1}{2}. \quad \text{Így a megoldások:} \\ x_1 = -19^\circ 28' + k_1 \cdot 360^\circ, x_2 = 30^\circ + k_2 \cdot 360^\circ, x_3 = 41^\circ 45' + k_3 \cdot 360^\circ, x_4 = -30^\circ + k_4 \cdot 360^\circ, x_5 = 199^\circ 28' + k_5 \cdot 360^\circ, \\ x_6 = 150^\circ + k_6 \cdot 360^\circ, x_7 = 138^\circ 28' + k_7 \cdot 360^\circ, x_8 = 210^\circ + k_8 \cdot 360^\circ.$$

7. Legyen $c = \frac{1}{n(n+1)}$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, de $n \neq -1; 0$. Ekkor $x = y + \frac{1}{n(n+1)}$, amit a másik egyenletbe beírunk: $y^2 + \frac{1}{n(n+1)} \cdot y - \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Írjuk fel a diszkriminánst:

$$D = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{4}{n(n+1)} = \frac{1+4(n^2+n)}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)^2.$$

Így már látható, hogy y racionális lesz, valamint x is. Az állítás megfordítása nem igaz. Egy ellenpélda: $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$; $3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

8. $\frac{V}{A} = \frac{\pi r^2 m / 3}{\pi r(a+r)} = \frac{7}{4}$. Elvégezve a műveleteket: $4rm = 21a + 21r$. Tudjuk, hogy $a^2 = r^2 + m^2$, így $4rm - 21r = 21\sqrt{r^2 + m^2}$. Láthatóan $m \geq 6$. Emeljünk négyzetre és rendezzünk: $16r^2m - 168r^2 - 441m = 0$. Ezt írhatjuk a következő alakban is:
 $(4r^2) \cdot \left(m - \frac{21}{2}\right) = 441m$, amiből $m \geq 11$, egyébként a bal oldal negatív lenne, a jobb oldal pedig pozitív.

$$(4r)^2 = \frac{882m}{2m-21} = \frac{441(2m-21) + 9261}{2m-21} = 441 + \frac{9261}{2m-21} = 441 + \frac{3^3 \cdot 7^3}{2m-21}.$$

Mivel $m \geq 11$, azért $2m - 21 > 0$, ami azt jelenti, hogy $2m - 21$ a $3^3 \cdot 7^3$ pozitív osztóival lehet egyenlő, de ekkor a $\frac{3^3 \cdot 7^3}{2m-21}$ értéke is ezen pozitív osztók közül kerül ki: 1, 7, 49, 343, 3, 21, 147, 1029, 9, 63, 441, 3087, 27, 189, 1323, 9261. Ezekhez 441-et adva négyzetszámot, $(4r)^2$ -et kell kapnunk. A négyzetszámok 0, 1, 4, 5, 6, 9 végződésűek lehetnek, így a felsoroltakból nyolc marad. Ezeket behelyettesítve csak $343 + 441 = 784 = 28^2$, $r = 7$ adódik. ($1323 + 441 = 1764$ is négyzetszám, de nem $(4r)^2$ alakú, hiszen nem osztható 16-tal.) Ha $\frac{3^3 \cdot 7^3}{2m-21} = 343$, akkor $2m - 21 = 27$, amiből $m = 24$, $a = 25$.

Számadó László