Az idei magyar–izraeli matematikaversenyt március 24. és 31. között az izraeli Haifában rendezték, közelebbről Izrael legrégibb egyetemén, a Technionban. Hagyományos módon az első nap egyéni verseny volt, 4 feladattal, 4 óra munkaidővel, a második nap pedig csapatverseny – egy csapat tagjai közösen dolgoztak előre megadott témából. Idén ez a téma gráfelmélet volt. Itt 6 feladatot kellett a csapatoknak 4 óra alatt megoldani. Az egyéni versenyen minden feladat helyes megoldása 7 pontot ért. A magyar versenyzők közül *Burcsi Péter* és *Gyarmati Katalin* a maximálisan megszerezhető 28 pontot érte el, *Bárász Mihály* eredménye 23 pont, *Gröller Ákos* pontszáma pedig 16 volt. Burcsi a pápai Türr István Gimnázium IV. osztályos tanulója, a többiek a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályába járnak. Az izraeli versenyzők pontszámai rendre 28, 15, 8, 8 voltak. Összesítésben tehát a magyar csapat 95:59 arányban győzött. A magyar csapat vezetője *Pelikán József*, az izraelié *Shay Gueron* volt.

A csapatversenyben hagyományosan nem hirdetünk formális eredményt, csak bejelentjük, hogy melyik csapat milyen teljesítményt nyújtott. A magyar csapat a 6-ból 5 feladatot oldott meg, az izraeli 2-t. (A 3. feladatot nem oldotta meg egyik csapat sem.) A feladatok szövegét alább közöljük.

A magyar csapatnak a csapatversenyen elért jó eredménye nem kis mértékben annak köszönhető, hogy 3 héten keresztül igen alapos felkészítésen vettek részt. Naponta felváltva tartott nekik foglalkozást *Fleiner Tamás, Győri Ervin, Lukács András* és *Montágh Balázs*. Segítségüket ezúton is szeretném megköszönni. A felkészítés alapja egyébként *Lovász László* klasszikus, "Combinatorial Problems and Exercises" című könyvének 6–10. fejezete volt. Külön köszönet illeti *Reiman Istvánt* és *Benczúr Pétert*, akik az egész tanév során rendszeresen tartottak foglalkozásokat egy bővebb keretnek, amiből azután a 4 utazó versenyző kikerült.

Az izraeli rendezők gazdag programról gondoskodtak. A haifai városnézés és múzeumlátogatások mellett kirándulást tettünk többek között Akkóba (a keresztes lovagok utolsó erősségébe), valamint a római kori Judea provincia székhelyére, Caesereába, ahol a régészek az utóbbi években grandiózus romokat tártak fel. Baráti légkörű záróbankett egészítette ki a programot.

A jövő évi versenyt ismét Magyarország rendezi.

**Pelikán József**

**1996. évi magyar–izraeli matematikaverseny feladatai**

**Egyéni verseny**

**1.** Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló $x_1, x_2, \ldots, x_{1997}$ sorozatot, amelyre teljesül

$$\sum_{k=1}^{1997} 2^{k-1} x_k^{1997} = 1996 \prod_{k=1}^{1997} x_k$$

**2.** Legyen $n$ pozitív egész szám és tegyük fel, hogy $n^2$ előáll, mint két szomszédos pozitív egész köbének a különbsége. Bizonyítsuk be, hogy $n$ előáll két négyzet összegeként. Bizonyítsuk be, hogy ilyen $n$ valóban létezik.

**3.** Tegyük fel, hogy egy konvex poliéder semelyik csúcsára sem igaz, hogy pontosan 3 él indul ki belőle. Bizonyítsuk be, hogy a poliédernek legalább 8 háromszög-lapja van.

**4.** Legyenek $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ tetszőleges valós számok és $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ olyan valós számok, amelyekre teljesül az $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ feltétel. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $k \leq n$ pozitív egész, amire teljesül

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| \leq |a_1 + a_2 + \ldots + a_k|.$$

**Csapatverseny**

**1.** Egy $G$ gráfnak 20 pontja van, nem tartalmaz háromszöget és minden pont foka osztható 4-gyel. Mennyi $G$ éleinek maximális száma?

**2.** Legyen $G$ egy $n$ csúcsú gráf ($n > 1$). Tegyük fel, hogy minden pont foka $\geq (n-1)/2$. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy, kevesebb, mint $1 + \log_2 n$ csúcsból álló $S$ halmaz, úgy, hogy minden $S$-en kívüli csúcshoz legalább egy $S$-beli csúcsból vezet él.

**3.** $k$ milyen értékeire teljesül az, hogy minden összefüggő, $k$-reguláris páros gráf tartalmaz Hamilton-kört?

**4.** Adott egy irányított gráf és annak két különböző $s$ és $t$ csúcsa. Tegyük fel, hogy minden pont be-foka egyenlő a pont ki-fokával, továbbá, hogy minden $t$-t tartalmazó, de $s$-et nem tartalmazó csúcshalmazra igaz az, hogy az ebbe a halmazba belépő élek száma legalább $k$. Bizonyítsuk be, hogy $s$ és $t$ között van $2k$ darab élidegen irányított út úgy, hogy közülük $k$ darab $s$-ből $t$-be, , a másik $k$ darab pedig $t$-ből $s$-be vezet.

**5.** Az 1000 csúcsú és 100 élű utat nem tartalmazó gráfok közül melyiknek van a legtöbb éle?

**6.** Jelöljük $f(k)$-val a $k$ csúcsú és 100 élű utat nem tartalmazó *összefüggő* gráfok élszámának a maximumát. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $c_1$ és $c_2$ konstansok, hogy

$$49 \cdot k - c_1 \leq f(k) \leq 49 \cdot k + c_2 \,.$$

Keressünk minél jobb értékeket $c_1$-re és $c_2$-re, ami érvényes

(a) $k$ minden értékére;

(b) kellően nagy $k$ értékekre.