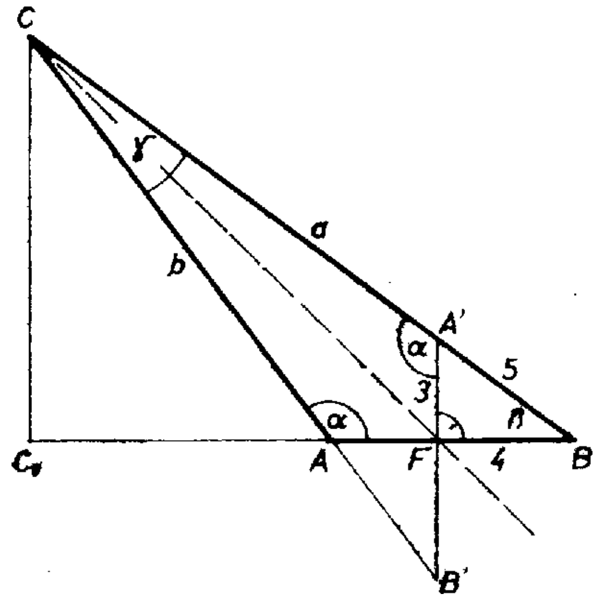
I. megoldás. Egy szerencsés ötlettel nagyon közel jutunk a megoldáshoz. Tükrözzük a szokásosan betűzött ABC háromszöget ($AB = c$ stb.) a γ szög CF felezőjére az $A'B'C$ helyzetbe (1. ábra).



Ekkor a szögfelező tétele szerint az AB oldal két darabjára $FA : FB = b : a = 3 : 4$, tehát $AF = A'F = 3$ és $FB = 4$ egység, másrészt $A'B = a - b = 5$.

Most már csak azt kell észrevennünk, hogy az $A'BF$ háromszög derékszögű – az ún. egyiptomi háromszög –, tehát a külső szög tétele alapján

$$FA'C\sphericalangle = \alpha = 90^\circ + \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + \beta,$$

amiből csekély átrendezéssel a sejtett egyenlőség adódik.

Madocsai Zsolt (Pannonhalma, Bencés Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Könnyen észrevesszük a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármas, illetve $3k$, $4k$, $5k$ oldalakkal bíró derékszögű háromszögek jelenlétét, ha – mint természetes – mi is *elkezdjük* a szögek kiszámítását:

$$\cos\alpha = \frac{15^2 + 7^2 - 20^2}{2 \cdot 15 \cdot 7} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta = \frac{20^2 + 7^2 - 15^2}{2 \cdot 20 \cdot 7} = \frac{4}{5},$$

azonban az egyszerű eredmény láttán, de főleg a kérdés lényegének megfelelően – nem nyúlunk hozzá a csupán közelítő értékeket tartalmazó trigonometriai táblázatokhoz.

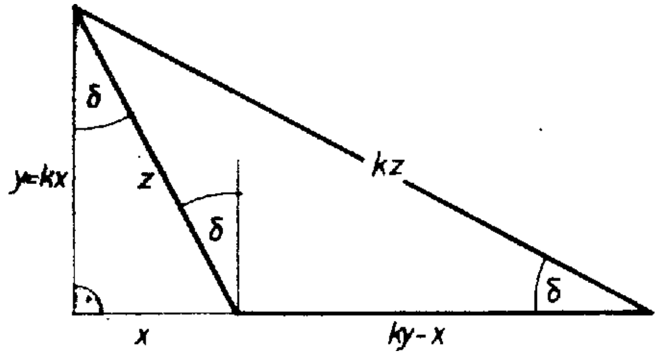
Számításunkból elég annyit kiolvasni: α tompaszög, β hegyesszög, másrészt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2(180 - \alpha) + \sin^2(90^\circ - \beta) = 1,$$

tehát $180^\circ - \alpha = 90^\circ - \beta$. Innen az I. megoldás befejezése szerint következik az állítás.

Megjegyzések. 1. Kissé más befejezés az, hogy a CC_0 magasság közös befogója a ACC_0 és CBC_0 egymáshoz hasonló derékszögű háromszögeknek, de a hasonlóságban CC_0 nem az önmaga megfelelője. E két háromszög a 3, 4 és 5 oldalakkal bíró háromszögnek $b : 5 = 3$-szoros, ill. $a : 5 = 4$-szeres nagyításával adódik.

2. Azt is látni az 1. megjegyzésből, hogy az igazolt szög-összefüggés érvényes minden olyan háromszögben, amely a leírt módon áll elő egy hasonló derékszögű háromszögpárból. Legyenek egy derékszögű háromszög oldalai $x < y < z$ (2. ábra).



Továbbá $y/x = k(> 1)$; ekkor a $kx = y,\ ky,\ kz\ (> z)$ oldalakkal szerkesztett háromszögből levágva az $y,\ x,\ z$ oldalú háromszöget, a maradó ($z,\ ky - x,\ kz$ oldalú) háromszög két szögének különbsége $90°$, és ekkor

$$(90° + \delta) = 3\delta + [(90° - \delta) - \delta]\,.$$

A tetszetős kapcsolatban tehát nem az $\alpha - 3\beta - \gamma = 0$ egész együtthatós összefüggés az érdekes, hanem hogy egyidejűen az oldalak is egész számok. De még ilyet is tetszőleges számban képezhetünk.