

„A labda gömbölyű” hallhatjuk esélytelen csapatok szurkolóitól a futballmeccsek előtt. Mint tudjuk, a focilabda szabályos ötszögletű és szabályos hatszögletű bőrdarabokból van összevarrva. Ha a bőrdarabokat nyújthatatlannak képzeljük, akkor azokból nem állítható elő egy gömbfelület. A jelenleg elfogadott labdákat ugyanis egy síklapokkal határolt testből konstruálták. Egy ilyen testnek minden csúcánál egy szabályos ötszög és két szabályos hatszög található egymással, ezt jelöljük a címben is látott (5, 6, 6) szimbólummal. Ez a cikk megadja ennek a testnek az előállítását, amelyből a test merőleges vetülete is megszerkeszthető.

Vegyünk egy $A'B'C'D'E'F'G'H'$ kockát. A kocka tetszőleges síkra való merőleges vetületének megszerkesztése megtalálható a legtöbb ábrázoló geometria könyvben¹ld. pl. Kárteszi Ferenc: Ábrázoló geometria (Tankönyvkiadó, Budapest, 1957), ezért erre itt nem térünk ki. A kocka egy csúcából kiinduló három élét tekintjük tengelykeresztnek, ennek alapján lehet megszerkeszteni a kocka $ABCDEFGH$ merőleges vetületét (1. ábra).

Amennyiben a kocka $A'C'F'H'$ csúcsai által meghatározott szabályos háromszöglapú testet tekintjük, akkor egy szabályos tetraédert kapunk. Ennek négy csúcsa, négy lapja és hat éle van. Merőleges vetületének szerkesztése a kocka merőleges vetületéből egyértelmű. A szabályos tetraéder hat élének felezéspontja egy szabályos oktaédert ad. Ezek a pontok azonosak a kocka lapközéppontjaival. Ez fordítva is igaz. Az oktaéder lapközéppontjai egy kockát határoznak meg. Ilyenkor mondjuk, hogy a két test *duális*a egymásnak. Az oktaéder nyolc szabályos háromszöglapból áll és tizenkettő éle van. Merőleges vetületének szerkesztése a tetraéder merőleges vetületéből úgy történik, hogy annak éleit felezzük (a merőleges vetítés aránytartása miatt).

Az oktaéderből származtatunk egy tizenkét csúcsú szabályos háromszöglapokból álló testet, amelyet *ikozaéder*nek hívnak. Milyen arányban osszuk fel az oktaéder éleit, hogy ikozaédert kapjunk? Ha felezzük az éleket, akkor a lapokon szabályos háromszögek, ellenben a csúcoknál négyzetek keletkeznek. Így a felezéspontok nem adják a keresett testet. Ha az oktaéder háromszöglapjainak éleit körbejárjuk, és az éleket valamilyen $\lambda \neq \frac{1}{2}$ arányban felosztjuk, figyelembe véve, hogy a körbejárás szerint előbb a nagyobb darabot vesszük, akkor a keletkezett pontok háromszöglapú testet szolgáltatnak. Ezek a háromszögek azonban nem mind szabályosak, csak azok, amelyek az eredeti oktaéder lapjain vannak. Az oktaéder csúcsainál keletkező két háromszög ugyan egybevágó és egyenlő szárú, de csak egy bizonyos λ -nál szabályos. Mielőtt λ -t meghatároznánk, megmutatjuk, hogy az oktaéder élei körbejárhatók a kívánalmaink szerint. Egy ilyen Euler-vonalat, bejárást mutatnak a 2. ábra nyilai. Válasszuk egységnek az oktaéder élhosszát, ekkor a hosszabb éldarab hossza λ , a rövidebbé $1 - \lambda$. Az oktaéder egyik csúcánál a két $1 - \lambda$ hosszúságú szakasz darab egymásra merőleges. Ezek tehát egy derékszögű háromszöget alkotnak. Ennek a derékszögű háromszögnek az átfogója azonos a korábban említett egyenlő szárú háromszög alapjával. Ugyanennek az egyenlő szárú háromszögnek a szára egy λ , $1 - \lambda$ oldalú 60° -os szöget bezáró háromszögnek a harmadik oldala. Azt akarjuk, hogy az egyenlő szárú háromszögünk szabályos legyen. A koszinusztételből:

$$2(1 - \lambda)^2 = \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 - 2\lambda(1 - \lambda)\frac{1}{2},$$

amiből

$$0 = \lambda^2 + \lambda - 1 \quad \text{azaz} \quad 1 = \lambda + \lambda^2,$$

ezért

$$\frac{1}{1 + \lambda} = \frac{\lambda}{1},$$

ami a jól ismert aranymetszés aránya. Szerkesztése a körre vonatkozó hatványból, vagy érintőszárú kerületi szögek segítségével a 3. ábrából leolvasható.

A fentiek szerint, ha az oktaéder éleit bejárjuk, és a bejárás szerint az aranymetszés arányában osztópontokat képezünk, akkor az osztópontok egy szabályos háromszögekből álló 12 csúcsú, 30 élű, 20 lapú testet, úgynevezett ikozaédert határoznak meg (4. ábra). Az ikozaéder merőleges vetületének szerkesztése az oktaéder-élek bejárásával kezdődik, majd az éleket a bejárásnak megfelelően aranymetszet arányban felosztjuk. Elég egy aranymetszetet szerkeszteni, és utána használhatjuk a párhuzamos szelők tételét. (Mivel eddig tárgyaltunk négy szabályos testet, illik hogy szót ejtsünk az ötödikről is, bár ezt nem használjuk a továbbiakban. Ez a test a dodekaéder. Az ikozaéder lapközéppontjai adják a dodekaéder csúcsait. Ezért e két test szintén duális a egymásnak. A tetraédernek önmaga a duális.)

A kitartó olvasó már a megoldás küszöbén van, ne csüggedjen, folytassa tovább! Mivel az ikozaéder egy csúcánál öt szabályos háromszög található, ezért a csúcok lemetszésével ötszögeket kapunk. A hatszögeknek pedig a háromszöglapokon kellene keletkezni. Kérdés: Hol vegyük fel az ikozaéder élein a pontokat, hogy a pontok egy szabályos ötszögekből és hatszögekből álló testet adjanak? Vagyis pongyolán fogalmazva: Szerkesszük meg a focilabdát!

Kis gondolkodás után beugrik a megoldás. Kérem az olvasótól, hogy szánjon a megoldásra néhány percet.

Igen, a megoldás valóban az éleken felvett két harmadolópontra. Így a 60 csúcs által meghatározott test (poliéder) szerkesztése sem nehéz, hiszen csak az ikozaéder éleit kell harmadolni, és a megfelelő pontokat összekötni (5. ábra).

Érdekes, hogy poliéderünk megalkotása egy komoly tudósokból álló csapatnak is hosszú töprengést okozott, amikor a közelmúltban felfedezett új szénmódosulatot, a C-60-at próbálták elképzelni. Lehet, futballistáink technikai hátránya is annak következménye, hogy a focilabda nem gömb.

Az ikozaéder fenti származtatását egyetemista koromban Hortobágyi Istvántól hallottam, köszönet érte. A cikkben bizonyítatlan állítások precíz indoklása megtalálható pl. *Hajós György: Bevezetés a geometriába c. könyvében.*

Nagy Gyula tanár, Szent István Gimnázium, Budapest



