Versenyeken – a KöMaL-ban is – gyakran kell olyan egyenlőtlenséget igazolni, amelyben egy háromszög oldalhosszai szerepelnek. Ezeknek a feladatoknak a megoldásakor általában nemcsak azt kell felhasználni, hogy az oldalak hossza pozitív, hanem azt is, hogy teljesül a háromszög-egyenlőtlenség; ez összesen hat feltétel. Ha a bizonyítandó egyenlőtlenség bonyolult, a lehetőségek száma olyan nagy lesz, hogy a néhány soros megoldás megtalálása, ha egyszerűen csak próbálgatással dolgozunk, nagyon hosszú időbe telik.

Például egyszer a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt az az egyenlőtlenség, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0. \tag{1}$$

A versenyen az akkori magyar csapatból ezt senki sem tudta bebizonyítani, pedig a feladatra létezik rövid megoldás: könnyen ellenőrizhető, hogy a bal oldalon álló mennyiség nem más, mint

$$\frac{(b+c-a)(c+a-b)(b-c)^2+(c+a-b)(a+b-c)(c-a)^2+(a+b-c)(b+c-a)(a-b)^2}{2}.$$

A kérdés csak az: hogyan lehet egy ilyen megoldást megtalálni?

Most egy olyan módszert szeretnék vázolni, amivel a kiindulási feltételek számát hatról háromra csökkentjük. Ez nem oldja meg automatikusan a feladatot, de sok esetben könnyebben felismerhetővé teszi a megoldást.

Legyenek a háromszög oldalai a, b, c, félkerülete s. Legyen $x=s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $y=s-b=\frac{1}{2}(c+a-b)$ és $z=s-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$. Ismeretes, hogy ezek a mennyiségek azoknak a szakaszoknak a hosszai, amelyekre a beírt kör érintési pontjai az oldalakat felosztják, azaz $a=y+z$, $b=z+x$ és $c=x+y$ (ez egyszerű behelyettesítéssel is igazolható). Az x, y, z mennyiségek pozitívak. Ez a feltétel, ami valójában három egyenlőtlenséget jelent, ekvivalens azzal, hogy a, b, c pozitív, valamint $a>b+c$, $b>c+a$ és $c>a+b$. Ha a, b, c helyére behelyettesítjük $(y+z)$-t, $(z+x)$-et és $(x+y)$-t, akkor a feladatot egy olyan egyenlőtlenség bizonyításává alakíthatjuk át, amely már nem egy háromszög oldalairól, hanem három közönséges pozitív számról szól.

Ezzel a módszerrel (1) így alakul:

$$\begin{gathered}(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\ge 0;\\ xy^3+yz^3+zx^3-x^2yz-y^2zx-z^2xy\ge 0;\\ xy(y-z)^2+yz(z-x)^2+zx(x-y)^2\ge 0.\end{gathered}$$

Az utolsó lépésig minden számolás mechanikus, csupán a négyzetösszeggé alakítás megtalálásához kell egy kicsit gondolkodni.

A háromszögnek sok más adata is kifejezhető x, y, z segítségével. Például a félkerület $s=x+y+z$, a terület a Héron-képletből $t=\sqrt{xyz(x+y+z)}$, a beírt kör sugara $r=\frac{t}{s}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$, a körülírt kör sugara $R=\frac{abc}{4t}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$.

Gyakorlás céljára néhány feladat:

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{27}{8}\le\frac{(a+b+c)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}<4.$$

2. Igazoljuk, hogy $R\ge 2r$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $3(a+b)(b+c)(c+a)\le 2(a^3+b^3+c^3)+18abc$.

4. Legyenek a háromszög súlyvonalai s_a, s_b, s_c. Igazoljuk, hogy

$$\left(s_a-\frac{|b-c|}{2}\right)\cdot\left(s_b-\frac{|c-a|}{2}\right)\cdot\left(s_c-\frac{|a-b|}{2}\right)\le st.$$

Kós Géza