1. Mivel $1995^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 195^\circ$, azért

$$\sin^2 1995^\circ = \sin^2 195^\circ = \sin^2 15^\circ \quad \text{és} \quad \cos^2 1995^\circ = \cos^2 195^\circ = \cos^2 15^\circ.$$

$4ab = 4\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ = \sin^2 30^\circ = \dfrac{1}{4}$, vagyis $ab = \dfrac{1}{16}$.

$$\log_2 = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{16} = \log_2 4 = 2.$$

Megjegyzés. Az ab értékét a következők felhasználásával közvetlenül is meghatározhatjuk:

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$

2. Legyen a kocka éle a, a szabályos tetraéderé pedig b, ekkor $A_1 = 6a^2$, $A_2 = \sqrt{3}b^2$. Tudjuk, hogy $6a^2 = \sqrt{3}b^2$, vagyis $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, amiből $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$. A térfogatok aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}b^3} = \frac{12}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}}\right)^3 = \frac{12}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{6\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} \approx 1,31.$$

3. I. megoldás. Az ABC háromszögben legyen C-nél a tompaszög. A legrövidebb magasság ekkor CT. Legyen a legrövidebb oldal BC, akkor a feladat szövege alapján $CT = BT$. Vagyis CBT egyenlő szárú derékszögű háromszög, a köré írt körben találtunk egy 45°-os kerületi szöget: $CBT\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 45^\circ$. A középponti szög ennek a kétszerese, így $AOC\sphericalangle = 90^\circ$. A szokásos jelölésekkel: $AC = b$, $CB = a$, $AO = CO = r$. $TB = CT = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $AT = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}}$ adódik a Pitagorasz-tétel segítségével. AOC és ATC derékszögű háromszögeknek közös az átfogójuk, ezért a rájuk felírt Pitagorasz-tételek összevetéséből $2r^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}$ adódik, vagyis $r = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

II. megoldás. Az előző megoldásban szereplő jelöléseket alkalmazzuk, továbbá AB felezőpontját nevezzük F-nek. Belátható, hogy OFT egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $FT = FO = \dfrac{c}{2} - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Felírjuk a Pitagorasz-tételt az OFA háromszögre:
$\left(\dfrac{c}{2} - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right) = r^2$, amiből $r^2 = \dfrac{c^2 + a^2 - \sqrt{2} \cdot ac}{2}$, vagyis $r = \sqrt{\dfrac{c^2 + a^2 - \sqrt{2} \cdot ac}{2}}$.

Megjegyzés. A két megoldásban kapott r érték formailag különböző. Megmutatható, hogy ezek egyenlőek egymással. Az ATC háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $b^2 = \dfrac{a^2}{2} + \left(c - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$, amiből $b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot ac$.

4. A feladat szövege alapján az $f^2(n) = n \cdot g(n)$ egyenlet pozitív egész gyökeit kell meghatározni: $\left(n^2 - 2n + 3\right)^2 = n\left(n^2 - 4n + 7\right)$. Elvégezzük a kijelölt műveleteket, majd a bal oldalra rendezzük a kapott tagokat: $n^4 - 5n^3 + 14n^2 - 19n + 9 = 0$. Ha van egész megoldás, akkor az csakis a konstans osztói között lehet. Vegyük figyelembe, hogy pozitív egész gyököket keresünk, így csak három érték jöhet szóba: $1,\ 3,\ 9$. Behelyettesítéssel kapjuk az egyedüli megoldást: $n = 1$.

5. Alkalmazhatjuk a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést két tagra, többször egymás után

$$\frac{\frac{\sqrt{6a-2}+\sqrt{6b-2}}{2} + \frac{\sqrt{6c-2}+\sqrt{6d-2}}{2}}{2} \le \frac{\sqrt{\frac{6a-2+6b-2}{2}} + \sqrt{\frac{6c-2+6d-2}{2}}}{2} \le$$
$$\le \sqrt{\frac{3(a+b) - 2 + 3(c+d) - 2}{2}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c+d) - 4}{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 - 4}{2}} = 1.$$

Néggyel szorozva kapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség az $a = b = c = d = \dfrac{1}{2}$ esetén van. *Megjegyzés.* Alkalmazhatjuk a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést négy tagra is, akkor valamivel kevesebb átalakítással érünk a bizonyítandó állításhoz.

6. A BC oldal felező merőlegesének felírása: a normálvektora: $BC(1; -3)$, felezőpontja: $F_a\left(-\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, egyenlete: $x - 3y = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -4$. A CA oldal felező merőlegesének felírása: a normálvektora: $CA(7; -1)$, felezőpontja: $F_b\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$, egyenlete: $7x - y = \frac{21}{2} + \frac{3}{2} = 12$. A két egyenes metszéspontja a kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása, $x = 2$, $y = 2$.

A metszéspont a keresett kör középpontja: $K(2;2)$, $KA = KC = KB = r = 5$ (a B pont második koordinátája 2, így szinte ránézésre adódik az $r = 5$). A keresett egyenlet: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$. *Megjegyzés.* Észrevehető, hogy az ABC háromszögre teljesülnek a 3. feladat feltételei, ezért $r = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5$. Ennek a birtokában a középpont koordinátái már könnyen megkaphatók.

7. Legyen a hat valós szám: a; $a+d$; $a+2d$; $a+3d$; $a+4d$; $a+5d$. A szöveg alapján $(a+d)^2 = a(a+5d)$, mivel a; $a+d$; $a+5d$ egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Végezzük el a kijelölt műveleteket: $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 5ad$. Az összevonás után $d^2 = 3ad$ adódik. Oszthatunk $3d^2$-nel ($d \neq 0$): $\frac{1}{3} = \frac{a}{d}$. A keresett arány: $\frac{1}{3}$. Ez azt jelenti, hogy $d = 3a$, vagyis a mértani sorozat így kezdődik: a; $4a$; $16a$; $\ldots$, amiből $q = 4$. A mértani sorozat tizedik eleme: $a_{10} = aq^9 = a \cdot 4^9 = 262\,144a = a + 87\,381 \cdot 3a = a + 87\,381d$, vagyis a számtani sorozat 87 382-edik tagja lesz az a szám, ami a mértani sorozatban a tizedik helyen áll.

Vegyük a mértani sorozat $(n+1)$-edik tagját. Ez $a_{n+1} = aq^n = a \cdot 4^n = a \cdot 2^{2n} = a + \left(2^{2n} - 1\right)a$. Mivel $d = 3a$, azért az aq^n akkor lehet tagja a számtani sorozatnak, ha $2^{2n} - 1$ osztható 3-mal. Az azonos, páros kitevőjű hatványok különbsége osztható az alapok összegével, ezzel az állításunkat beláttuk.

8. $\cos x \neq 0$; $\cos 2x \neq 0$; $\cos 3x \neq 0$, amiből $x \neq 90° + k_1 \cdot 180°$; $x \neq 45° + k_2 \cdot 90°$; $x \neq 30° + k_3 \cdot 60°$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

Az első és a második tagból kiemelhető a $\operatorname{tg}^2 x$, a negyedik és az ötödik tagból pedig a -6:

$$\operatorname{tg}^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x) - 6(1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x) - (\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) = 0$$

Tudjuk (a Függvénytáblázatban is megtalálható): $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(3x - 2x) = \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x}$, ezért $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x$ helyett $\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x)$ írható. Ezután $1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x$ kiemelhető:

$$\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 6\right) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x) = 0.$$

Két eset van: I. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 6 = 0$, amiből vagy $\operatorname{tg} x_1 = -2$, $x_1 = -63°26' + k_4 \cdot 180°$, $k_4 \in \mathbf{Z}$, vagy $\operatorname{tg} x_2 = 3$, $x_2 = 71°34' + k_5 \cdot 180°$, $k_5 \in \mathbf{Z}$

II. $1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$. Belátható, hogy ebben az esetben nincs megoldás (pl. a $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ és a $\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x}$ alkalmazásával).

Számadó László