Az 1993. februári számban jelent meg a következő feladat: *Van-e olyan 2-hatvány, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja az* 1, 9, 9, 3 *jegyekkel kezdődik?*

I. Idézzük föl mindenekelőtt a feladat megoldását. Olyan n és k pozitív egészeket keresünk, amelyekre

(1) $$1993 \cdot 10^k \leq 2^n < 1994 \cdot 10^k$$

teljesül. Mindkét egyenlőtlenség mindkét oldalának a 10-es alapú logaritmusát véve és rendezve, (1) a következő alakba írható:

$$\log 1993 \leq n \cdot \log 2 - k < \log 1994,$$

ill. figyelembe véve, hogy $[\log 1993] = [\log 1994] = 3$,

$$\{\log 1993\} \leq n \cdot \log 2 - (k+3) < \{\log 1994\}$$

(itt $\{\alpha\}$ az α szám tört részét jelöli); azaz

(2) $$0,2995072987 \approx \{\log 1993\} \leq \{n \cdot \log 2\} < \{\log 1994\} \approx 0,2997251539.$$

Válasszunk először egy olyan m természetes számot, amelyre $\frac{1}{m} < \{\log 1994\} - \{\log 1993\}$; pl. $m = 10000$ megfelelő. Az $\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right)$ intervallumok ($i = 0, 1, \ldots, m-1$) száma m, és ezek együttesen lefedik a $[0,1)$ intervallumot. Így a $\{\log 2\}, \{2 \cdot \log 2\}, \ldots, \{(m+1) \cdot \log 2\}$ számok között (amelyek páronként különbözőek $\log 2$ irracionalitása miatt) lennie kell két olyannak, amelyek ugyanabba az $\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right)$ intervallumba esnek. Tehát léteznek olyan $1 \leq a < b \leq m+1$ egészek, hogy $|\{a \cdot \log 2\} - \{b \cdot \log 2\}| < \frac{1}{m}$. Ebből már könnyen belátható olyan c pozitív egésznek a létezése, amelyre $\{c \cdot \log 2\} < \frac{1}{m}$. Egy ilyen c számnak pedig nyilván létezik olyan n többese, ami eleget tesz (2)-nek.

II. A felidézett bizonyítás csupán annyit használt fel a feladat szereplőiről, hogy $\log 2$ irracionális; így a megfelelő állítás igaz marad 1993 helyett tetszőleges számjegysorozatra[1]Egy példa a π első három jegyére: $2^{41745} = 10^{12566} \cdot 3.14173\ldots$. Azt sem nehéz megmutatni, hogy végtelen sok, az (1) követelményt kielégítő n szám létezik. A létezés igazolása után nézzünk most néhány konkrét kitevőt is a megfelelők közül. Némi próbálgatás után számológéppel könnyen megtalálhatjuk az alábbi értékeket:

$$2^{12621} = 10^{3799} \cdot 1,993311971\ldots, (\mathrm{A}) 2^{14757} = 10^{4442} \cdot 1,993636670\ldots, (\mathrm{B}) 2^{16893} = 10^{5085} \cdot 1,993961422\ldots; (\mathrm{C})$$

Az ötödik számjegyet figyelve látható, hogy a 2 kitevőjét 2136-osával növelgetve viszonylag hamar elérhetjük, hogy a hatvány 1, 9, 9, 6-tal kezdődjön: $2^{16893+k\cdot 2136}$ értéke $k = 7$ mellett

$$2^{31845} = 10^{9586} \cdot 1,996236116\ldots,$$

és még a $k = 8$ és 9 is jó.

Az eredeti kérdésre visszatérve, az ott bemutatott 12621-es kitevőnél kisebb is található:

(D) $$2^{1456} = 10^{438} \cdot 1,993763709\ldots,$$

bár ez az előzőekhez képest egy „magányos" megoldás. Ha azonban megengedünk negatív hatványkitevőt is, akkor a kitevőnek a bevált 2136-tal való csökkentése itt is eredményre vezet:

$$2^{-680} = 10^{-205} \cdot 1,99343899\ldots, 2^{-2816} = 10^{-848} \cdot 1,993114323\ldots.$$

III. Ábrázolhatjuk a feladatbeli problémát (a természetesen adódó számegyenes helyett) a síkon is, a következőképpen. Vegyünk fel a síkon egy szokásos derékszögű koordinátarendszert, jelöljük ennek alapvektorait $\mathbf{i}$-vel és $\mathbf{j}$-vel. Tekintsük ezután azt a pontrácsot, amelyet az $\mathbf{u} = (\log 2)\mathbf{i}$ és a $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ alapvektorok feszítenek ki. Ebben egy $n\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ helyvektorú rácspont (n,k) koordinátái pontosan akkor elégítik ki (2)-t, ha a pont benne van abban az y tengellyel párhuzamos keskeny sávban, amelyet az

$$x = \log 1993 = 3,2995072\ldots$$

és az

$$x = \log 1994 = 3,2997251\ldots$$

egyenletű egyenesek határolnak. Az **I.**-ben leírt megoldás eredménye itt úgy fogalmazható meg, hogy a sávban létezik (méghozzá a megoldást követő megjegyzés szerint végtelen sok) rácspont. Az (A), (B), (C)-beli példáknak megfelelő rácspontok egyetlen rácsegyenesen vannak rajta, amelynek a meredeksége alig 0,022 szögmásodperccel tér el a 90 foktól. Az érdeklődő Olvasó kiszámolhatja, vajon az (A), (B), (D) valamint a (B), (C), (D) rácsháromszögekben van-e további rácspont.

Bakos Tibor

11