Nézzünk továbbra is olyan feladatokat, amelyeknél az A halmaz elemeinek számát úgy határozzuk meg, hogy A elemeihez hozzárendeljük egy olyan B halmaz elemeit, amelyben könnyebb az elemek megszámlálása (lovak helyett a lovasokat számoljuk meg). A párbaállítást valamilyen kódolási eljárás adja meg. Kódolási módszereket használva különféle tételeket tudunk bizonyítani.

Cayley-tétele és a Prüfer-kód[1]

Fának nevezünk egy összefüggő gráfot, ha nem tartalmaz kört. Az *ábra* két fagráfot ábrázol. A fákra vonatkozó legegyszerűbb tétel a következő:

1. ábra

1. ábra

2. ábra

Tétel. Egy n szögpontú fa éleinek száma $n-1$.

A bizonyítás a következő: Válasszuk ki a fa egy tetszőleges szögpontját, és nevezzük ezt a fa „gyökerének". Számozzuk meg a többi pontot az $1, 2, \ldots, n-1$ számokkal. Számozzunk meg minden élt az él azon végpontjának számával, amely a gyökértől induló és a szóban forgó éllel záródó útnak a végpontja. Ilyen módon minden élt megszámoztunk, és az $1, 2, \ldots, n-1$ számok mindegyikét pontosan egyszer használtuk fel (minthogy minden pont a gyökérrel egyetlen úttal van összekötve), azaz az élek száma $n-1$.

Az első nem triviális kérdést a fákról Cayley vetette fel, és ő is oldotta meg: Hány adott pontú különböző fa létezik? A válasz legalább kétféle lehet, attól függően, hogy mikor tekintünk két fát különbözőnek. Mi a számozott szögpontú fák számát fogjuk meghatározni.

Cayley-tétele. Az n számozott szögpontú fák száma: $C_n = n^{n-2}$.

A tétel legszebb bizonyítása Prüfertől 1918-ból származik. A bizonyítás fő gondolata az, hogy minden fához hozzárendel egy olyan $n-2$ számból álló sorozatot, amelynek minden eleme az 1, 2, …, n számok valamelyike. Egy ilyen sorozatot a fa Prüfer-kódszavának neveznek. Minthogy az ilyen kódszavak száma n^{n-2}, Cayley formulájának bizonyításához elegendő megmutatni, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az n-szögpontú számozott fák és a Prüfer-kódszavak között. Ahhoz, hogy ezt belássuk, elég megmutatni, hogyan végezhető el a kódolás és a dekódolás folyamata.

Előbb két egyszerű fogalmat értelmezünk. Egy gráf egy P pontját a gráf végpontjának nevezzük, ha fokszáma (a pontból induló élek száma) 1. Az olyan élt, amelynek legalább egyik végpontja a gráfnak végpontja, határoló élnek nevezzük.

A kódolási eljárás:

a) Válasszuk ki a legkisebb számmal megszámozott végpontot (az *ábrán* levő gráf 3-as számú pontját), távolítsuk el ezt a fából a hozzá vezető határoló éllel együtt, és írjuk le ezen elhagyott él másik végpontjának indexét (a 4-et); ez lesz a kódszó első jele.

44112 Prüfer-kódszó

Prüfer-kódszó: 6233

Dekódolási eljárás: 6233 233 33 3 145 456
256 56 56 36

A megfelelő fa:

b) Ismételjük meg ugyanezt az eljárást a megmaradó fával egészen addig, amíg csak egy 2-szögpontú gráf marad, azután álljunk meg.

A dekódolási eljárás:

Írjuk a kódszó alá növekvő sorrendben az 1, 2, …, n számok közül mindazokat, amelyek nem fordulnak elő a kódszóban. Nevezzük ezt a sorozatot antikódnak. Kössük össze a kódszó első jelével számozott pontot az antikód első jegyével számozott ponttal. Hagyjuk el ezeket a jeleket; ha a kódszó elhagyott jegye nem fordul elő többször a kódszó megmaradt részében, írjuk ezt az antikódba a megfelelő helyre. Ismételjük az eljárást az új kódszóval és antikóddal mindaddig, amíg a szó eltűnik. Kössük össze végül azt a két pontot, amelyeknek indexei az utolsó antikódot alkotják.

Az Erdős-Szekeres tétel

Tétel. A különböző valós számokból álló $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ sorozatnak vagy létezik egy m-nél hosszabb csökkenő részsorozata, vagy van egy n-nél hosszabb növekvő részsorozata.

Bizonyítás. A sorozat minden eleméhez egy számpárt rendelhetünk: $a_i \to (l_i^+, l_i^-)$, ahol l_i^+ jelenti az a_i-vel kezdődő leghosszabb növekvő részsorozat elemeinek számát, l_i^- az a_i-vel kezdődő leghosszabb csökkenő részsorozat elemeinek számát jelenti.

Az így képzett számpárok különbözők. Hiszen, ha $i < j$ és $a_i < a_j$, akkor $l_i^+ > l_j^+$, ha pedig $a_i > a_j$, akkor $l_i^- > l_j^-$.

l_i^+ és l_i^- pozitív egész számot jelöl. Az olyan különböző számpárok száma, melyben $l_i^+ \le n$, $l_i^- \le m$, $m \cdot n$. Mivel a sorozat elemeihez rendelt számpárok száma $m \cdot n + 1$, ezért valamelyik i-re vagy $l_i^+ > n$ vagy $l_i^- > m$, mely a tétel igazolását jelenti.

A Sperner-lemma

Tétel. Ha egy n elemű H halmaznak $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ olyan részhalmazai, hogy egyik sem tartalmazza semelyik másik halmazt, akkor $m \le \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Megjegyzés. Az $m = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ érték elérhető, ha vesszük az n elemű H halmaz összes $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemű részhalmazát.

A tétel (a Sperner-lemma) bizonyítása többféleképp elvégezhető. Lássuk azt, amelynek ötlete az eddigiek közé illik.

Bizonyítás. A $B_s \supset B_{s-1} \supset \cdots \supset B_2 \supset B_1$ sorozatot láncnak nevezzük. A H halmaz n hosszúságú láncainak száma $n!$. Ha $|A_i| = k_i$, akkor A_i részhalmaz $k_i! \cdot (n-k_i)!$ db n hosszúságú láncban szerepel, s ha $i \ne j$, akkor A_i és A_j nem lehet ugyanabban a láncban, tehát

$$n! \ge \sum_{i=1}^{m} k_i!(n-k_i)! \ge m \cdot \left[\frac{n}{2}\right]! \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)!$$

azaz $m \le \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

A diagram-módszer[2]

Az n szám pozitív egészek összegeként való előállításait az n szám partícióinak nevezzük. Különféle kérdések, állítások megfogalmazhatók ehhez kapcsolódva.

Tétel. Az n szám olyan felosztásainak száma, amelyekben k a legnagyobb rész, egyenlő az n szám k részre való felosztásainak számával.

Bizonyítás. Ha például $n = 7$ és $k = 4$, akkor $4+1+1+1$, $4+2+1$, $4+3$ a 7 azon felosztásai, amelyekben a legnagyobb rész 4. A 7-nek négy részre való felosztásai pedig: $4+1+1+1$, $3+2+1+1$, $2+2+2+1$.

A tétel bizonyítását szemléletesebbé tehetjük, ha az n tetszőleges felosztásához egy ún. Ferrers-féle diagramot rendelünk. Például a $3+2+1+1$ felosztáshoz tartozó diagramot a bal oldai *ábra* mutatja.

5. ábra

5. ábra

6.ábra

A diagramot átalakítjuk úgy, hogy a sorokból oszlopok, az oszlopokból pedig sorok váljanak. Ez lesz a konjugált diagram. (Egy diagram konjugáltjának konjugáltja az eredeti diagram lesz.) A jobb oldalon látható az előbbi diagram konjugáltja, mely a 7-nek az egyik olyan felosztását $(4+2+1)$ mutatja, amelyben a legnagyobb rész 4.

A diagramok (és konjugált diagramok) segítségével – ahogyan a példa mutatja – párbaállíthatók az n szám olyan felosztásai, amelyekben k a legnagyobb rész, azokkal a felosztásokkal, amelyekben az n számot k részre osztjuk fel. Ez a megfeleltetés igazolja a tételt.

Róka Sándor, Nyíregyháza