1. Az első egyenlet $\sqrt{x+y}$-ra másodfokú, s mivel $\sqrt{x+y} \geq 0$, azért $\sqrt{x+y}=2$, $x+y=4$. Az

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

azonosság alkalmazásával $40=64-12xy$, tehát az $xy=2$, $x+y=4$ egyenletrendszert kell megoldani. Ennek $x_1=2+\sqrt{2}$, $y_1=2-\sqrt{2}$ és $x_2=2-\sqrt{2}$, $y_2=2+\sqrt{2}$ megoldásai az egyenletrendszer megoldásai.

2. Elegendő igazolni, hogy $\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2+y^2+1-x-y-xy\right) \geq 0$. Ez viszont teljesül, mert azonos átalakításokkal

$$\frac{1}{2}\left(x^2-2x+1+y^2-2y+1+x^2+y^2-2xy\right)=\frac{1}{2}\left((x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\right) \geq 0$$

valóban minden valós $(x,\, y)$ számpárra teljesül. Az egyenlőség $x=1$, $y=1$ esetén áll fenn.

3. Azonos átalakításokkal

$$f(x)=1+\frac{1}{(x+1)^2+1}. \tag{1}$$

Mivel $(x+1)^2+1 \geq 1$, azért $f(x)$ valóban minden valós számra értelmezhető, és értéke mindig pozitív, és $0<\frac{1}{(x+1)^2+1} \leq 1$, ezért $1<f(x) \leq 2$, a lehetséges értékek halmaza.

Ha $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$, akkor $g(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2+1}$, és $f(x)=1+g(x+1)$, tehát ha a $g(x)$ grafikonját a $\mathbf{v}(-1;1)$ vektorral eltoljuk, akkor kapjuk $f(x)$ grafikonját.

4. Ha $\sin(\alpha-\beta)=0$, akkor $\alpha-\beta=k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ahonnan $\beta=\alpha-k\pi$, $2\beta=2\alpha-2k\pi$, $2\beta-\alpha=\alpha-2k\pi$, tehát valóban $\sin(2\beta-\alpha)=\sin(\alpha-2k\pi)=\sin\alpha$. Az állítás nem fordítható meg, amit egyetlen ellenpélda igazol, pl. ha $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$. (Felhasználhatjuk, hogy $\sin(2\beta-\alpha)-\sin\alpha=-2\cos\beta\sin(\alpha-\beta)$.)

5. Legyen a BC oldal felezőpontja A_1, $CA_1A\sphericalangle=\varphi$, ekkor $BA_1A\sphericalangle=180^\circ-\varphi$ és a koszinusztétel alkalmazásával

$$b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+s_a^2-as_a\cos\varphi \quad \text{és} \quad c^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+s_a^2+as_a\cos\varphi,$$

azaz

$$b^2+c^2=2s_a^2+\frac{1}{2}a^2 \quad \text{és} \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Innen

$$4s_a^2=2\left(b^2+c^2\right)-\left(b^2+c^2-2bc\cos\alpha\right)=b^2+c^2+2bc\cos\alpha=(b+c)^2-2bc(1-\cos\alpha).$$

Mivel $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, azért valóban $s_a^2=\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

6. Mivel $a_{n+1}=2a_n-1$, így $a_{n+1}-1=2a_n-2=2(a_n-1)$, vagyis a_1-1, $a_2-1, \ldots, a_k-1, \ldots$ egy 2 hányadosú mértani sorozat. Ezért $a_1-1=3$ figyelembevételével $a_n=3\cdot 2^{n-1}$, tehát $a_n=3\cdot 2^{n-1}+1$. Így

$$S_n=3\cdot\left(1+2+\cdots+2^{n-1}\right)+n=3\cdot\left(2^n-1\right)+n=3\cdot 2^n+n-3.$$

7. Mindkét kör sugara 10 egység, a $C_1(-8;12)$ és $C_2(4;-4)$ középpontok távolsága $C_1C_2=20$ egység, ezért a két kör a C_1C_2 távolság $E(-2;4)$ felezőpontjában érinti egymást. A keresett kör érinti az x tengelyt, ezért ha a középpontja $C(u;v)$, akkor $r^2=v^2$, tehát egyenletét $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$ alakban kereshetjük.

Az $E(-2;4)$ pont rajta van ezen a körön, tehát egyrészt

$$(-2-u)^2+(4-v)^2=v^2, \tag{1}$$

másrészt a $C(u;v)$ pont rajta van a C_1C_2 egyenesen, amelynek egyenlete $4x+3y=4$, tehát

$$4u+3v=4. \tag{2}$$

A (2) egyenletből $u=1-\frac{3}{4}v$, ezt az (1) egyenletbe helyettesítve

$$\left(-3+\frac{3}{4}v\right)^2+(4-v)^2=v^2,$$

ahonnan $9v^2-200v+400=0$, $v_1=20$, $v_2=\dfrac{20}{9}$, így $r_1=20$, $u_1=-14$ és $r_2=\dfrac{20}{9}$, $u_2=-\dfrac{2}{3}$. A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$(x+14)^2+(y-20)^2=400, \quad \text{illetve} \quad \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{20}{9}\right)^2=\frac{400}{81}.$$

8. Ha $p=0$, akkor $f(x)=-x+5$ a $]2;4[$ nyílt intervallumban csak pozitív értéket vesz fel.

Az $f(x)=p\left(x-\dfrac{1}{p}\right)(x-5)$ alakból leolvasható, hogy ha $p<0$ vagy $0<p\le\dfrac{1}{4}$, akkor $f(x)$ csak pozitív értéket vesz fel: ha $\dfrac{1}{4}<p<\dfrac{1}{2}$, akkor felvesz pozitív és negatív értéket is; ha pedig $p\ge\dfrac{1}{2}$, akkor csak negatív értéket vesz fel.

Rábai Imre