Ismeretes Fermat sejtése – ami talán már bizonyítva is van – amely szerint $n>2$ természetes szám esetén az $x^n+y^n=z^n$ egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében. Az is ismert, hogy az $n=2$ esetben a fenti egyenletnek végtelen sok megoldása van, és ezeket egyértelműen meg is lehet adni. Az $n=1$ eset természetesen triviális; tetszőleges a, b természetes számokra $x=a$, $y=b$, $z=a+b$ adja az összes megoldást.

Kérdés azonban, hogy mi történik, ha n helyébe tetszőleges racionális szám kerül. Az $n=\dfrac{1}{2}$ és $n=\dfrac{1}{3}$ esetet a **Gy. 3023.** gyakorlatban és az **F. 3094.** feladatban láthattuk.[1]Kitűzésük az 1995/9. számban, megoldásuk mostani számunk 163. oldalán található. Ez utóbbiban szerepelt az a megjegyzés is, hogy ha $n=\dfrac{1}{k}$ alakú, ahol $k>1$ természetes szám, akkor a megoldás $x=a^k\cdot d$, $y=b^k\cdot d$, $z=c^k\cdot d$ alakú, ahol a, b, c, d tetszőleges természetes számok.

Feladatunk tehát az

$$(*)\qquad x^r+y^r=z^r$$

egyenlet pozitív[2]Negatív szám racionális kitevőjű hatványának az értelmezése a valós számkörben gondot okoz. Bizonyos esetekben ez lehetséges; például egész kitevőnél, vagy olyan kitevőnél, ahol a számláló 1 és a nevező páratlan. A megoldás viszont ilyen esetekben is visszavezethető pozitívakra. egész gyökeinek a meghatározása, ahol r tetszőleges racionális szám. Meghatározásként azt is megengedjük, hogy a megoldást $x^n+y^n=z^n$ alakú egyenlet megoldására vezetjük vissza, ahol $n>0$ egész.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy korlátozódhatunk pozitív kitevőre. Az $r=0$ esetben a (*) alatti egyenletnek nyilván nincs megoldása. Ha r negatív, akkor $r=-s$, pozitív s-sel. A (*) alatti egyenlet tetszőleges a, b, c megoldására ekkor $(bc)^s+(ac)^s=(ab)^s$ teljesül. Fordítva, az $x^s+y^s=z^s$ egyenlet bármely a', b', c' megoldása esetén $(b'c')^r+(a'c')^r=(a'b')^r$ áll fenn. Ez éppen azt jelenti, hogy minden megoldás egyértelműen visszavezethető egy pozitív kitevős $(*)$ alakú egyenlet megoldására.

Érdemes azonban az $r=-1$ esetet külön szemügyre venni. Ekkor tehát olyan a, b, c számhármasokat keresünk, amelyekre $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ teljesül. Az előzőek alapján természetes, hogy a megoldások $a=b'c'$, $b=a'c'$, $c=a'b'$ alakba írhatóak, ahol $a'+b'=c'$ teljesül. Ez az előállítás azonban nem eléggé világosan kifejtett. Mivel pozitív megoldásokat keresünk, ezért $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}>0$, azaz $b>c$, tehát $d=b-c$ pozitív egész. b helyébe $(c+d)$-t téve és ezt az eredetiből kapható $bc+ac=ab$ egyenlőségbe behelyettesítve a $c^2+cd+ac=ac+ad$, illetve a $c^2=(a-c)d$ egyenlőséghez jutunk. Ez azt jelenti, hogy d osztója c^2-nek, $c^2=de$. Ekkor „visszahelyettesítve" $b=c+d$ és $a=e+c$ adódik. És valóban:

$$ac+bc=(e+c)c+(c+d)c=ec+c^2+c^2+cd=ec+ed+c^2+cd=(e+c)(c+d)=bc.$$

Eszerint az összes megoldást a következőképpen kaphatjuk: Választunk egy tetszőleges (pozitív egész) c-t, majd c^2-nek egy pozitív d osztóját. Ekkor $a=\dfrac{c^2}{d}+c$, $b=c+d$, c megoldásai lesznek a vizsgált egyenletnek.

Nézzük végül azt az esetet, amikor $r=\dfrac{p}{q}$ pozitív egész p és q számokkal. Mint tudjuk, azt is feltehetjük, hogy p és q relatív prímek. Most tehát kiindulási egyenletünk a

$$\sqrt[q]{x^p}+\sqrt[q]{y^p}=\sqrt[q]{z^p}$$

alakot ölti. A fent idézett feladatmegoldás megjegyzéséből adódik, hogy ezen egyenlet minden pozitív egész megoldása

$$(1)\qquad a^p=(a')^q\cdot d,\qquad b^p=(b')^q\cdot d,\qquad c^p=(c')^q\cdot d$$

alakú, ahol a', b', c', d pozitív egészek és

$$(2)\qquad a'+b'=c'$$

teljesül. Az is feltehető, hogy az itt fellépő három számnak nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Az $a'=a''d'$, $b'=b''d'$, $c'=c''d'$ esetben ugyanis (1)-ben a', b', c', d rendre helyettesíthető az a'', b'', c'', $d(d')^q$ számokkal. A (2) egyenlőség alapján a', b', c' közül bármely kettőnek közös osztója osztja a harmadikat is. Így feltehető, hogy a', b', c' páronként relatív prímek.

A pozitivitást felhasználva az (1) alatti első két egyenlőségből $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^q$ következik. Tekintettel arra, hogy a' és b' relatív prímek, az egyértelmű prímtényezős felbontás szerint $\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^q$ csak úgy lehet teljes p-edik hatvány, ha $a'=u^p$ és $b'=v^p$, alkalmas u, v pozitív egészekkel. Hasonlóképpen adódik az is, hogy $c'=w^p$, ahol w is pozitív egész. A kapott

$$(3)\qquad a'=u^p,\qquad b'=v^p,\qquad c'=w^p$$

11

22

kifejezéseket (2)-be helyettesítve az

$$u^p + v^p = w^p \tag{4}$$

összefüggést nyerjük. Ha mármost feltesszük, hogy a „Fermat sejtés” igaz, akkor a (4) alatti egyenletnek nem lehet pozitív egész megoldása a $p > 2$ esetben. A $p = 1$ esetben a fent idézett eredmények szerint (1) alatt megkaptuk az összes megoldást. Vizsgáljuk meg most a $p = 2$ esetet is. Ekkor egyenletünk:

$$\sqrt[q]{x^2} + \sqrt[q]{y^2} = \sqrt[q]{z^2}.$$

A megoldásokra (1) és (3) alapján

$$a = u^q \cdot d, \qquad b = v^q \cdot d, \qquad c = w^q \cdot d \tag{5}$$

adódik, ahol (4) szerint $u^2 + v^2 = w^2$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges u, v, w pitagoraszi számhármashoz az (5) alatti formula adja meg az $r = \dfrac{2}{q}$ esetben (q páratlan) a $(*)$ egyenlet összes megoldását.

Fried Ervin, *Gyökök lineáris kombinációjáról*, Akadémia III. Osztály Közleményei **IV.** (1954), 155–162. o.

Fried Ervin, *A pitagoraszi számhármasokról*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996/2. 72. o.

Fried Ervin