1. Azonos átalakításokkal $(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$, $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$, tehát

$$f(x)=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+34, \qquad f(x)=\left(x^2-5x+5\right)^2+9.$$

Innen látható, hogy $f(x)\geq 9$ és a legkisebb értéket, a 9-et akkor veszi fel, ha $x^2-5x+5=0$, azaz ha $x=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)$ vagy $x=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)$.

2. Az ABC háromszög területe (pl. Heron-képlettel) $t=3,3$ területegység. Legyen C merőleges vetülete az AB oldalon C_1. A trapéz területe $T=AC_1\cdot CC_1$ (miért?). Mivel $AB\cdot CC_1=2\cdot 3,3$, azért $CC_1=1,5$ egység, és innen $AC_1=3,6$ egység, tehát

$$T=3,6\cdot 1,5=5,4 \text{ területegység.}$$

3. Ha az $x^2+px-q=0$ és az $x^2+qx-p=0$ egyenleteknek van közös gyöke, akkor az a

$$(p-q)x-q+p=0$$

egyenletnek is gyöke. Mivel $p\neq q$, azért $x_0=-1$ a közös gyök. Ha az első egyenlet gyökei x_0, x_1, a másodiké x_0, x_2, akkor egyrészt $x_1=q$, $x_2=p$, másrészt $-1+q=-p$ $(-1+p=-q)$, azaz valóban $x_1+x_2=p+q=1$. Egy olyan másodfokú egyenlet, amelynek gyökei x_2 és x_3 $(x_2=p,\ x_3=1-p)$, $x^2-x+p(1-p)=0$.

4. Mivel $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ és $\sqrt{a^2}=|a|$, ezért $\frac{|\sin x+\cos x|}{\sin x+\cos x}=-1$ pontosan akkor, ha $\sin x+\cos x<0$, amiből $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$, $\pi+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<2\pi+2k\pi$, $\frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

5. Az egyenlet $(y-x)(x-2y)=6$ alakban írható. Mivel $6=1\cdot 6=6\cdot 1=(-1)\cdot(-6)=(-6)\cdot(-1)=2\cdot 3=3\cdot 2=(-2)\cdot(-3)=(-3)\cdot(-2)$, azért

$y-x$	1	6	-1	-6	2	3	-2	-3
$x-2y$	6	1	-6	-1	3	2	-3	-2
y	$y<0$	$y<0$	7	7	$y<0$	$y<0$	5	5
x			8	13			7	8

A megoldások a táblázatból leolvashatók.

6. Mivel $a=2r\sin\alpha$, $b=2r\sin\beta$ és $c=2r\sin\gamma$, azért

$$4r^2\sin^2\alpha-4r^2\sin^2\beta=4r^2\sin\gamma, \qquad \text{ahonnan}$$
$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=\sin\gamma,$$
$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta).$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta).$$

Mivel most $\sin(\alpha+\beta)>0$, azért $\sin(\alpha-\beta)=1$, $\alpha-\beta=90^\circ$. A feltételből $\alpha+\beta=144^\circ$, tehát $\alpha=117^\circ$ és $\beta=27^\circ$.

7. Az adott $(x-6)^2+(y+1)^2=4$ kör $C(6;-1)$ középpontjának az $x-2y=-2$ egyenletű egyenesre eső merőleges vetülete $T(4;3)$. A szóban forgó két kör közös külső érintői merőlegesek az $x-2y=-2$ egyenletű egyenesre, így egyenletüket $2x+y+k=0$ alakban kereshetjük. A $C(6;-1)$ pont távolsága az érintőktől $r=2$ egység, így

$$2=\frac{|12-1+k|}{\sqrt{5}},$$

ahonnan $k=-11+2\sqrt{5}$ vagy $k=-11-2\sqrt{5}$, azaz a külső érintők egyenlete

$$2x+y-11+2\sqrt{5}=0 \qquad \text{és} \qquad 2x+y-11-2\sqrt{5}=0.$$

A belső érintők átmennek a $T(4;3)$ ponton, és a $C(6;-1)$ ponttól $r=2$ egység távolságra vannak. A belső érintők egyenletét

$$Ax+By-4A-3B=0 \qquad (A^2+B^2>0)$$

alakban kereshetjük. Így

$$2=\frac{|6A-B-4A-3B|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$2\sqrt{A^2+B^2}=2|A-2B|$, $A^2+B^2=A^2-4AB+4B^2$, $B(3B-4A)=0$.

Ha $B=0$, akkor A tetszőleges (nem nulla) szám lehet, így az egyik belső érintő egyenlete $x=4$, ha $A=3$, akkor $B=4$, így a másik belső érintő egyenlete $3x+4y-24=0$.

8. Az egyenletnek $x = 2$ és $x = -2$ nem lehet megoldása. Szorozzuk meg $(x^2 - 4)$-gyel az egyenlet mindkét oldalát. Az

$$x^2 + (12 - a)x + 2(12 - a) = 0$$

egyenlet diszkriminánsa $D = (12 - a)^2 - 8(12 - a) = (a - 4)(a - 12)$.

Ha $D < 0$, azaz ha $4 < a < 12$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a = 4$, akkor az eredeti egyenlet egyetlen megoldása $x_1 = -4$.

Ha $a = 12$, akkor az eredeti egyenlet megoldása $x_2 = 0$.

Ha $a < 4$ vagy $a > 12$ és $a \neq 13$, akkor az eredeti egyenletnek két megoldása van:

$$x_3 = \frac{a - 12 + \sqrt{(a-4)(a-12)}}{2} \qquad \text{és} \qquad x_4 = \frac{a - 12 - \sqrt{(a-4)(a-12)}}{2}.$$

Ha $a = 13$, akkor az egyetlen megoldás $x_5 = -1$.

Rábai Imre