Pitagoraszi számhármasoknak azokat a pozitív a, b, c egész számokból álló számhármasokat nevezik, amelyekre $a^2 + b^2 = c^2$ teljesül. Az elnevezés arra utal, hogy ezek a számhármasok léphetnek fel egy derékszögű háromszög oldalainak a mérőszámaként.

A pitagoraszi számhármasok szokásos meghatározása elég elemien történhet; lényegében csak az egyértelmű prímtényezős felbontást kell felhasználni. A bizonyításban van ugyan néhány „trükkös” gondolat is, de ezek is egész elemiek. Az okoz némi nehézséget, hogy eleve olyan megoldásokra kell korlátozódni, amelyekben a fellépő számhármasok relatív prímek. Ebből természetesen kapható az összes megoldás; mégpedig at, bt, ct alakban, ahol t tetszőleges pozitív egész szám. Ez azt mutatja, hogy a megoldásban csupán a szereplő számok *aránya* lényeges. A megoldásokat három pozitív egész paraméter segítségével adják meg; amelyek egyike éppen a fenti t. A másik két paraméter pedig „majdnem” független egymástól.

Itt most egy olyan módszert fogunk tárgyalni, ahol csupán egyetlen paraméter szerepel; igaz, ez egy racionális szám. Ez a racionális szám egyszerre szolgáltatja az összes at, bt, ct alakú megoldást; lényegében annak megfelelően, hogy melyik két egész szám hányadosaként írjuk fel. A másik két paraméter (tulajdonképpen ezek a lényegesek) „egybevonódik”.

Osszuk el a kiindulási egyenlőséget a^2-tel. Ezt megtehetjük, mert csupán pozitív számok léphetnek fel. Így az

$$(1) \qquad 1 + u^2 = v^2 \qquad \left(u = \frac{b}{a},\ v = \frac{c}{a}\right)$$

egyenlőséghez jutunk. Az u és v racionális számokra tehát $v^2 - u^2 = 1$ teljesül, amit

$$(2) \qquad (v + u)(v - u) = 1$$

alakba írhatunk. Mivel u, v racionális számok, ezért $r = v + u$ és $\frac{1}{r} = v - u$ is azok. $v > u$ miatt $v + u > v - u$ és így $r > 1$. r-rel kifejezve u-t és v-t, a

$$(3) \qquad v = \frac{r + \frac{1}{r}}{2} \qquad \text{és} \qquad u = \frac{r - \frac{1}{r}}{2}$$

összefüggéshez jutunk. Ezáltal az összes megoldást leírtuk. Be kell azonban látni, hogy bármely racionális r esetén a (3) alatti képlet megoldást szolgáltat. Ez viszont azonnal következik, ha a (3) alatti kifejezéseket (2) bal oldalába beírjuk. Láthatjuk, hogy a kapott r paraméter csak a pitagoraszi számhármas elemeinek az arányát határozza meg. Ez tulajdonképpen „jó” is. A derékszögű háromszögre gondolva ez azt jelenti, hogy csak a különböző alakú háromszögeket tekintjük különbözőknek.

Még mindig célszerű valamit megvizsgálni. Nevezetesen az előállítás egyértelműségét; vagyis azt, hogy a (3) alatti formula más megoldást ad-e, ha r helyébe egy tőle különböző r' racionális számot írunk. Ez is azonnal belátható, mert ha ugyanahhoz a számhármashoz jutunk, akkor a $v' = v$ és $u' = u$ egyenlőségekből $r = v + u = v' + u' = r'$ adódik.

Ne higgyük azt, hogy most már *teljesen* készen vagyunk. Egy dologról megfeledkeztünk. Nevezetesen arról, ha az eredeti egyenlőséget b^2-tel osztjuk, akkor ugyanolyan formájú egyenlőséghez jutunk, mint az előbb. Ennek a megoldása viszont láthatóan más r racionális szám lesz. Például a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármas esetén 3-mal osztva $u = \frac{4}{3}$, $v = \frac{5}{3}$ és $r = \frac{9}{3} = 3$ adódik. Ha viszont 4-gyel osztunk, akkor azt kapjuk, hogy $u = \frac{3}{4}$, $v = \frac{5}{4}$ és $r = \frac{8}{4} = 2$. Ez csupán egy apró kis „szépséghiba”, mégis érdemes megvizsgálni, hogy mely racionális számpárokhoz tartozik ugyanaz a pitagoraszi számhármas. Feltehető, hogy eredetileg $a < b$ teljesül[1] $a = b$ lehetetlen, mert $\sqrt{2}$ irracionális. Igaz, hogy ennek a kimutatásánál is felhasználjuk az egyértelmű prímfaktorizációt; de enélkül is boldogulnánk, csupán az $a = b$ esetet kellene külön tárgyalni.. Ez azzal ekvivalens, hogy $u > 1$. Behelyettesítve ide az u-ra adott (3) alatti értéket az $r - \frac{1}{r} > 2$ egyenlőtlenséghez jutunk. Hasonló módon látható, hogy az $a > b$ feltétel az $r - \frac{1}{r} < 2$ egyenlőtlenséggel ekvivalens. Mint láttuk, $r > 1$; és ebben az esetben az $r - \frac{1}{r}$ kifejezés mindkét tagja r-ben monoton növekszik. Ha tehát megkeressük az $r - \frac{1}{r} = 2$ egyenlet 1-nél nagyobb *valós* gyökét (amennyiben pontosan egy ilyen van), akkor a gyöknél nagyobb r-ek esetében a megfelelő egészekre $a < b$, a gyöknél kisebbekre viszont $b < a$ teljesül. Ha egyértelműséget akarunk, akkor elég az egyik „irányra” korlátozódni. Egyenletünket átalakítva azt nyerjük, hogy $r^2 - 2r - 1 = 0$, azaz $(r - 1)^2 = 2$. Ennek az egyenletnek valóban egyetlen 1-nél nagyobb (sőt egyetlen pozitív) valós gyöke van: $r = 1 + \sqrt{2}$.

Ha már itt tartunk, akkor azt is érdemes megnézni, hogy milyen r és s racionális számpárok szolgáltatják ugyanazt a megoldást. Erre ugyan nincs szükség a megoldáshoz, de teljesebbé teszi képünket. Nagyság szerint rendezve a megoldásokat az

$$(4) \qquad 1 < \frac{r - \frac{1}{r}}{2} < \frac{r + \frac{1}{r}}{2}, \qquad \text{illetve az} \qquad \frac{s - \frac{1}{s}}{2} < 1 < \frac{s + \frac{1}{s}}{2}$$

[1] *

hármasokhoz jutunk. Feltétel szerint e két számhármas mindegyike az $a<b<c$ pitagoraszi számhármasból keletkezett. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{r-\frac{1}{r}}{2}=\frac{b}{a},\quad \frac{r+\frac{1}{r}}{2}=\frac{c}{a}\qquad \text{és}\qquad \frac{s-\frac{1}{s}}{2}=\frac{a}{b},\quad \frac{s+\frac{1}{s}}{2}=\frac{c}{b}. \tag{5}$$

Az

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)}\qquad \text{és a}\qquad \frac{c}{b}=\frac{\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)}$$

összefüggéseket felhasználva (5)-ből tehát azt kapjuk, hogy:

$$\frac{s-\frac{1}{s}}{2}=\frac{2}{r-\frac{1}{r}}\qquad \text{és}\qquad \frac{s+\frac{1}{s}}{2}=\frac{r+\frac{1}{r}}{r-\frac{1}{r}}=\frac{r^2+1}{r^2-1}. \tag{6}$$

Egyszerűbb alakra hozva az

$$\frac{s^2-1}{2s}=\frac{2r}{r^2-1},\qquad \text{illetve az}\qquad \frac{s^2+1}{2s}=\frac{r^2+1}{r^2-1} \tag{7}$$

egyenlőségeket nyerjük. Ebből összeadással az

$$s=\frac{2s^2}{2s}=\frac{s^2-1}{2s}+\frac{s^2+1}{2s}=\frac{2r}{r^2-1}+\frac{r^2+1}{r^2-1}=\frac{(r+1)^2}{r^2-1}=\frac{r+1}{r-1}=1+\frac{2}{r-1}$$

egyenlőséghez jutunk. Ezt az egyenlőséget $s-1=\dfrac{2}{r-1}$, illetve $(s-1)(r-1)=2$ alakra hozhatjuk. Ez az – r és s között fennálló – összefüggés adja meg azt a feltételt, hogy ezekhez a racionális számokhoz ugyanaz a pitagoraszi számhármas tartozik. Ez a feltétel nemcsak szükséges, de elégséges is ahhoz, hogy ugyanazt a pitagoraszi számhármast határozzák meg. Ha ugyanis $s=1+\dfrac{2}{r-1}$, akkor

$$\frac{s^2-1}{2s}=\frac{\left(1+\frac{2}{r-1}\right)^2-1}{2\left(1+\frac{2}{r-1}\right)}=\frac{(r+1)^2-(r-1)^2}{2(r-1)(r+1)}=\frac{4r}{2(r^2-1)}=\frac{2r}{r^2-1},$$

és hasonlóképpen $\dfrac{s^2+1}{2s}=\dfrac{r^2+1}{r^2-1}$. Eszerint a (7), és így a (6) alatti feltételek igazak. Ebből viszont azonnal következik, hogy az (5)-ben szereplő a, b, c-re fennálló arányok mindkét esetben megegyeznek. Az $s=r$ esetben természetesen a már szerepelt $(r-1)^2=2$ egyenlőséghez jutunk.

A már említett 3, 4, 5 pitagoraszi számhármasnál a két esetben $r=3$ és $r=2$ adódott. Valóban $(3-1)(2-1)=2$.

A kapott előállításból meghatározhatjuk a pitagoraszi számhármasok „eredeti” előállítását is. Igaz, az egyértelműségi feltétel ebből nem olvasható ki. Tegyük fel, hogy $r=\dfrac{x}{y}$ alkalmas pozitív x és y egész számokkal. Ebből $\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{x}$ következik. Ezeket (3)-ba behelyettesítve és átalakítva

$$v=\frac{x^2+y^2}{2xy}\qquad \text{és}\qquad u=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

adódik. Ebből azonnal kapjuk, hogy $a=2xyt$, $b=(x^2-y^2)t$ és $c=(x^2+y^2)t$ alakú. Itt a három paraméter tetszőleges, de vigyázni kell arra, hogy nem minden esetben kapunk különböző megoldást.

Fried Ervin