A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1995. októberi számában egy érdekes cikk jelent meg az Erdős–Mordell tétel első közlésének hatvanadik évfordulója alkalmából, bemutatva a tétel számos alkalmazását és általánosítását. (Lásd [1], [2].)

A tétel fontosságára való tekintettel talán érdeklődésre tarthat számot a cikkben közölt bizonyítás alábbi, egyszerűsített változata.

Tétel. *Legyen P az ABC háromszög egy belső vagy határpontja. Legyen P távolsága a csúcsoktól rendre R_a, R_b, R_c, az oldalegyenesektől pedig rendre r_a, r_b, r_c. Ekkor fennáll az*

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a + r_b + r_c) \tag{1}$$

egyenlőtlenség (1. ábra).

A bizonyítás három lépésből áll. A továbbiakban használjuk a szokásos $a = BC$, $b = CA$ és $c = AB$ jelöléseket.

1. Ha P a BC oldalon fekszik (*2. ábra*), akkor az APC háromszög kétszeres területe br_b-vel, az ABP háromszög kétszeres területe pedig cr_c-vel egyenlő, így az ABC háromszög kétszeres területe $br_b + cr_c$. Másrészt R_a nem lehet rövidebb az ABC háromszög A-ból induló magasságánál, így aR_a nem lehet kisebb az ABC háromszög kétszeres területénél. Tehát

$$aR_a \geq br_b + cr_c. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlőtlenség érvényben marad a BAC szögtartomány bármely P pontjára, hiszen P-t az AP félegyenes és a BC oldal P' metszéspontjára cserélve a P'-re vonatkozó egyenlőtlenség hasonlóság miatt ekvivalens (2)-vel.

2. Alkalmazzuk (2)-t P helyett annak a BAC szögtartomány szögfelezőjére vett P' tükörképére. Minthogy értelemszerű jelölésekkel $R'_a = R_a$, $r'_b = r_c$ és $r'_c = r_b$, innen a BAC szögtartomány bármely P pontjára az

$$aR_a \geq br_c + cr_b. \tag{3}$$

összefüggést nyerjük.

3. Ha P az ABC háromszög belső- vagy határpontja, akkor az a, b, c indexek ciklikus permutálásával látható, hogy (3) mellett fennállnak a

$$bR_b \geq cr_a + ar_c \quad \text{és} \quad cR_c \geq ar_b + br_a$$

összefüggések is. A három egyenlőtlenséget rendre a-val, b-vel, c-vel leosztva, majd összeadva őket, a tétel állítása adódik:

$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{b^2+c^2}{bc}r_a + \frac{c^2+a^2}{ca}r_b + \frac{a^2+b^2}{ab}r_c \geq 2(r_a + r_b + r_c).$$

A fenti bizonyítás elemzésével könnyen látható, hogy pontosan akkor áll egyenlőség (1)-ben, ha az ABC háromszög szabályos és P a középpontja. Ennek végiggondolását az olvasóra bízzuk.

Referenciák

[1]Egy geometriai probléma megoldása, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, (11. évf., 1935. febr.)

[2]*Reiman István:* 60 éve jelent meg a Középiskolai Matematikai Lapokban az Erdős–Mordell tétel, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (45. évf., 1995., 385–394. o.)

Komornik Vilmos, Strasbourg