A cikk első részében[1] összefoglaltuk a mérések megtervezésével, a mérési adatok gyüjtésével, táblázatba foglalásával és grafikus ábrázolásával kapcsolatos legfontosabb ismereteket. Megmutattuk, hogyan lehet a többször megismételt mérés eredményeinek „szórásából” (statisztikus ingadozásából) a mérés pontosságára következtetni. Most a mérési adatok további feldolgozásával, a mérés „kiértékelésével” foglalkozunk.

Az eljárást ugyanazon a konkrét mérési feladaton, a Nagykanizsai Nyári Fizikatábor[2] egyik problémáján mutatjuk be, amelyet az első részben is idéztünk: egy nagyméretű ($R = 40$ cm sugarú) nehéz karikából fizikai ingát készítettünk, és mértük a saját síkjában kis lengéseket végző inga T lengésidejét a felfüggesztési pont és a középpont x távolságának függvényében. A mérési adatokat és azok becsült hibáját a *táblázat* tartalmazza.

x [cm]	20	30	40	50	60	70
$T_{\text{átlag}}$ [s]	2,05	1,83	1,79	1,81	1,87	1,94
$\Delta T_{\text{négyzet}}$ [s]	0,02	0,02	0,01	0,02	0,01	0,01

Tegyük fel, hogy a mérést végző ismeri (vagy a függvénytáblázatból ki tudja keresni) a fizikai inga lengésidejét megadó

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

képletet, ahol Θ az ingának a felfüggesztési pontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, s pedig a tömegközéppontjának és a felfüggesztési pontnak a távolsága. Jelen esetben $s = x$, Θ pedig az ún. Steiner-tétel szerint (amely szintén megtalálható a képletgyüjteményekben) $\Theta_0 + mx^2$, ahol Θ_0 a tömegközéppontra (a karika középpontjára) vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, azaz jó közelítéssel mR^2. Ezek szerint a lengések T periódusideje és az x távolság között fenn *kell* álljon a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{R^2+x^2}{x}}$$

összefüggés.

Ennyi elméleti ismeret birtokában kitűzhetjük magunk elé pl. azt a célt, hogy a mérési adatokból határozzuk meg a nehézségi gyorsulás (vagyis g) nagyságát a mérés helyszínén. (Igaz ugyan, hogy g ismert 9,81 m/s^2-os értéke megtalálható a táblázatokban, de attól mi még leellenőrizhetjük, hogy valóban annyi-e!)

Hogyan lehet a fenti gyökös formulából és a mérési adatokból g-t meghatározni, s a kiszámított (tehát közvetett úton megmért) g-nek mennyi a mérési hibája? Erre többféle módszer is megadható, de talán a legegyszerűbb a grafikus módszer. Alakítsuk át a fenti képletet olymódon, hogy két | alkalmasan választott | mennyiség között egyenes arányosság (vagyis lineáris függvénykapcsolat) álljon fenn:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\cdot\left(\frac{R^2}{x}+x\right).$$

Látható, hogy a mérési adatokból kiszámítható T^2, illetve $(R^2/x + x)$ mennyiségek egyenesen arányosak egymással, s az arányossági tényező nagyságából ki tudjuk számítani a g nehézségi gyorsulást is. Ábrázoljuk tehát T^2-t $(R^2/x + x)$ függvényében, s a mérési adatoknak megfelelő pontokra illesszünk egy | az origón is átmenő | egyenest. Az *ábrán* a szemünknek „legjobban tetsző” egyenest folytonos vonallal rajzoltuk, szaggatottan pedig azt a két egyenest, amelyiknél érzésünk szerint nem lehet meredekebb, illetve laposabb a keresett lineáris függvény. (Léteznek a szemmértéknél „tudományosabb” egyenes-illesztési módszerek is, például a zsebszámológépek némelyike által is ismert Gauss-féle „legkisebb négyzetek módszere”, ezekkel azonban ebben a cikkben nem foglalkozunk.) Az ábráról leolvashatjuk, hogy a $4\pi^2/g$ meredekség $4{,}1 \pm 0{,}1$ (SI egységekben, vagyis s^2/m-ben mérve), ahonnan g „mért értéke” 9,6 m/s^2, a hibája pedig $\pm 0{,}25$ m/s^2.

Természetesen azt is megtehettük volna, hogy a lengésidő képletéből kifejezzük g-t T és x segítségével, majd minden egyes adatpárra kiszámítjuk a nekik megfelelő g-t, és ezek számtani közepét tekintjük g mért értékének. Ezzel az eljárással azonban lemondtunk volna az adatok áttekinthető ábrázolásáról, ami pl. a feltételezett függvénykapcsolattól való esetleges eltérés könnyű felismerését teszi lehetővé. (Meg kell jegyeznünk azonban, hogy a modern számítógépes méréskiértékelési eljárások grafikus ábrázolás nélkül is működőképesek, hatékonyak lehetnek.)

Mi a helyzet olyankor, amikor valahonnan tudjuk (vagy legalább sejtjük), hogy két mennyiség hatványfüggvény kapcsolatban áll egymással: $y = A\cdot x^n$, ahol A és n számunkra ismeretlen, meghatározandó állandók. Régebben általában úgy jártak el, hogy x-t és y-t úgynevezett log–log papíron (logaritmikusan eltorzított skálájú milliméterpapíron) ábrázolták, s ott illesztettek egyenest a mérési pontokra. Manapság, amikor szinte minden diáknak van zsebszámológépe, könnyen ki tudjuk számítani a mérési adatokból az $Y = \log y$ és a $X = \log x$ mennyiségeket, s mivel a feltételezett hatványviselkedésnek az $Y = n\cdot X + \log A$ lineáris függvény felel meg, visszavezettük a feladatot hagyományos milliméterpapíron elvégezhető egyenesillesztési problémára. Az egyenes meredeksége megszabja az n hatványkitevőt, az

[1] lásd lapunk múlt havi számában

[2] lásd még lapunk 503. oldalán

$X = 0$-nak megfelelő tengelymetszet pedig $\log A$-t. Ezt a módszert (amely a log–log papíros ábrázolással egyenértékű) azért érdemes megtanulni, mert nem csak hatvány-, hanem szinte tetszőleges alakú függvényre alkalmazható. Ha például tudjuk, hogy két mérhető mennyiség, y és x között

$$y = Ax^2 \cdot e^{-B/x}$$

alakú a kapcsolat, csak éppen az A és B mennyiségeket nem ismerjük, akkor a

$$\log(y/x^2) = \log A - B \cdot (1/x)$$

összefüggésből azt is tudjuk, hogy $Y = \log(y/x^2)$ és $X = 1/x$ között lineáris a kapcsolat, s az Y–X síkon illesztett egyenes adataiból le tudjuk olvasni A-t és B-t.

Említést kell még tennünk a hibaszámítás egyik fontos problémájáról, a hiba „öröklődésének”, a hiba terjedésének szabályairól. A korábban elemzett fizikai ingás problémánál a grafikonra illesztett egyenes k meredekségét (SI egységekben) 4,1-nek találtuk, s a hibáját $\pm$0,1-nek becsültük. Ilyenkor azt is szokták mondani, hogy a meredekség relatív hibája $\dfrac{0{,}1}{4{,}1} \approx 0{,}025$, azaz 2,5 % nagyságrendű. Mi következik ebből a meredekség reciprokával arányos g mennyiség pontosságára? Megtehetjük azt, hogy behelyettesítjük a $g = 4\pi^2/k$ képletbe a meredekség két szélsőséges értékét (tehát a grafikon által még elfogadhatónak tartott legkisebb, illetve legnagyobb k számot), s ezek meghatározzák annak az intervallumnak a határait, amelyben az „igazi” g benne kell legyen.

A fenti (direkt) módszer elvileg egyszerű, nem igényli a felsőbb matematika (differenciálszámítás) ismeretét, de meglehetősen időigényes. Azok kedvéért, akik már megismerkedtek a derivált függvény fogalmával, megadjuk az „egyszerűbb” receptet is. Ha egy $y(x)$ függvény független változóját egy kicsiny Δx értékkel megváltoztatjuk (x mért fizikai mennyiségnek legyen Δx a mérési hibája), akkor a belőle kiszámítható y mennyiség megváltozása (mérési hibája) jó közelítéssel

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x,$$

ahol az $f'(x)$ deriváltat a mért (névleges) x értéknél kell képezni. Az y mennyiség abszolút hibája tehát

$$|\Delta y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

nagyságrendű. Ha például $y = Ax^n$, akkor $|\Delta y| = Ax^{n-1} \cdot |\Delta x|$, ami a relatív hibák nyelvén sokkal egyszerűbb képletbe megy át:

$$\frac{\Delta y}{y} = |n| \cdot \frac{\Delta x}{x},$$

azaz n-edik hatványozásnál a relatív hiba $|n|$-szeresére növekszik. A fizikai inga problémájánál g a meredekség (-1)-edik hatványával arányos, tehát a relatív hibája megegyezik a meredekség 2,5 százalékos relatív hibájával: $g = 9,6 \cdot (1 \pm 0{,}025) = 9{,}6 \pm 0{,}25\ \mathrm{m/s^2}$.

Kicsit bonyolultabb eset az, amikor egy | a mérési adatokból kiszámított | y mennyiséget két különböző (s mondjuk egymástól függetlenül mért) adatból (pontosabban adatsor átlagából) kapjuk meg. Gondoljunk például arra, hogy megmérjük egy l hosszúságú (matematikainak tekinthető) inga T lengésidejét, s a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ képletből akarjuk meghatározni a nehézségi gyorsulás számértékét. Természetesen l-et is és T-t is többször mérjük, s az átlagolt l-ekből és átlagolt T-kből számítjuk ki g névleges értékét. Vajon milyen pontos lesz ez a g, ha l-et Δl, T-t pedig ΔT pontossággal ismerjük? Most is megtehetjük azt, hogy zsebszámológéppel kiszámítjuk a legnagyobb elképzelhető (a mérés pontossága alapján még elfogadható) l-hez és a hasonló értelemben vett lehető legkisebb T-hez tartozó g-t, illetve fordítva, a másik irányban menve el a legszélsőségesebb esetig, s ezekből leolvassuk g mérési hibahatárait. Van azonban egyszerűbb út is! Mivel $g = 4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2}$, a keresett g-nek l bizonytalanságából adódó relatív hibája megegyezik l relatív hibájával, T bizonytalanságából adódó relatív hiba pedig az időmérés relatív hibájának kétszerese. Ha például az inga hosszát 3 % pontossággal ismerjük, az időt pedig 2 % pontossággal tudjuk mérni, akkor az egyik ok miatt 3 százalék, a másik miatt pedig 4 százalék lesz g relatív bizonytalansága. Azt gondolhatnánk, hogy ilyenkor a mérés teljes hibáját 7 %-osnak vehetjük, ez azonban nem igaz! Nagyon valószínűtlen, hogy a kétféle mérés pontatlansága mindig egymást erősítve jelentkezne, az esetek számottevő részében „segítenek egymáson”, a hibák részben kiejtik egymást. Ennek az a következménye, hogy az egymástól független hibaforrásokból származó relatív hibák nem adódnak simán össze, hanem a Pitagorasz-tételre emlékeztető módon négyzetesen tevődnek össze. Az előző számpéldában tehát a 3 és 4 százalékos relatív hiba együttes hatása csupán $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ százalék! Mivel azonban a mérés kiértékelésénél úgyis csak a *hibák nagyságrendjét* adjuk meg, nem pedig azok pontos értékét, nem követünk el nagy hanyagságot, ha a több hibaforrás együttes hatását az egyes relatív hibák algebrai összegével, vagy még egyszerűbben, a legnagyobb hibatényező nagyságrendjével közelítjük.

Külön megfontolást igényel az az eset, amikor a mérési adatokból számított végeredmény két, közel egyforma nagyságú mennyiség különbségeként áll elő. Ilyenkor az eredmény relatív hibája (a kicsiny nevező miatt) lényegesen nagyobb lehet, mint a közvetlenül mért adatok relatív hibája. A fizika történetének legpontosabb mérései olyan ötletekből születtek, amelyek valamilyen módon lehetővé tették kicsiny mennyiségek *közvetlen* mérését. Eötvös Loránd például nem úgy mérte meg 8 jegy pontossággal a súlyos és tehetetlen tömeg közötti esetleges kicsiny különbség nagyságát (pontosabban azt a határt, aminél biztosan nem lehet nagyobb ez a különbség), hogy 8 jegy pontossággal megmérte volna mindkét típusú tömeget, hogy kivonja azokat egymásból, hanem olyan mérési elrendezést talált, amely magára a tömegkülönbségre érzékeny, közvetlenül azt méri. Hasonló módszerrel, tehát közvetlenül a különbséget mérve határozták meg a hidrogénatom két közeli állapota közötti energiakülönbséget. Ez az úgynevezett hiperfinom átmenet, amely során kibocsátott fény frekvenciája 1420,405 751 782 MHz-nek adódott. A mérés relatív hibája $\pm 1{,}2 \cdot 10^{-12}$; ez a fizika (sőt, a természettudományok) történetében mindezideig a legpontosabb mérés a világon!

(G.P.)

x [cm]	20	30	40	50	60	70
$T_{\text{átlag}}$ [s]	2,05	1,83	1,79	1,81	1,87	1,94
$\Delta T_{\text{négyzetes}}$ [s]	0,02	0,02	0,01	0,02	0,01	0,01