1994-ben nemcsak a Lapok, hanem az Eötvös verseny is centenáriumot ünnepelt: éppen 100 évvel ezelőtt, 1894-ben indította útjára a Tanulóversenyt a Mathematikai és Physikai Társulat. Ezzel akarták - és sikerült - emlékezetessé tenni azt a tényt, hogy a társulat elnöke, Báró Eötvös Loránd 1894 nyarán Magyarország kultuszminisztere lett.

Az első versenyt 1894 szeptember 17-én tartották az abban az évben érettségizett tanulók számára, összesen két helyszínen - a két egyetemi városban -, Budapesten és Kolozsváron. Összesen 29 diák adott be dolgozatot. Az eredményt október 25-én, a Társulat ünnepélyes ülésén hirdették ki, ahol Eötvös, a Társulat elnöke - egyben miniszter és az Akadémia elnöke - személyesen adta át az első és második helyezettnek a díjakat. Ezeket a díjakat már akkor „Báró Eötvös-díj”-nak nevezték. Később érem is járt a díjjal, amelyet Eötvös csináltatott. Ma már sajnos egyetlen ilyen érem sem lelhető fel Magyarországon, de megmaradt Eötvös hagyatékában az érem terve. Ennek alapján készíttette el a centenáriumra az Eötvös Loránd Fizikai Társulat azt a díszes oklevelet, amelyet idén először kaptak az Eötvös verseny nyertesei.

1994 október 21-én tizenöt helyszínen: Budapesten, Szegeden, Debrecenben, Pécsett, Miskolcon, Veszprémben, Győrött, Egerben, Nyíregyházán, Békéscsabán, Nagykanizsán, Pakson, Sopronban, Székesfehérváron és Szombathelyen rendezték meg egyidőben a versenyt a szokásos feltételekkel: indulhattak az az évben érettségizettek, valamint középiskolai tanulók. A megoldási idő 300 perc volt, minden segédeszközt (könyveket, jegyzeteket, zsebszámológépet) lehetett használni. Összesen 336 versenyszerű dolgozat érkezett be a feladatokat kitűző és a megoldásokat értékelő Versenybizottsághoz (elnök: Radnai Gyula, tagok: Károlyházy Frigyes, Gnädig Péter).

Ismertetjük a feladatokat, azok megoldását és a verseny eredményét.

1. feladat. Egy tóba 20 m mélyre lesüllyesztett, 1 m^3 űrtartalmú búvárharang megtelt vízzel. A felszínen úszó hajóból vékony csövön át levegőt pumpálunk a harang alá. (A harang súlyos, még ekkor sem emelkedik fel.) A levegő és a víz hőmérséklete között nincs számottevő különbség.

| Legalább mekkora munkát végez a kompresszor az 1 m^3 víz kiszorítása során?

Károlyházy Frigyes

Megoldás. Készítsünk vázlatos *ábrát* a folyamatról! Hagyjunk el minden felesleges részletet, hogy maga a termodinamikai folyamat jól látható legyen. Két, egymást követő részfolyamatról van szó:

| először össze kell nyomni a gázt a megfelelő nagyobb nyomásra (20 méterrel a víz felszíne alatt a nyomás a légkori nyomásnak kereken háromszorosa);

| ezután a megfelelő nyomású gázt át kell nyomni a búvárharang alá, a víz helyére.

Mindezt az *1. ábrán* vázoltuk.

Úgy tűnik, hogy a dugattyút nyomó erő munkáját kell meghatározni. Ez azonban nagyobb, mint a kompresszor által végzett munka, mert „besegít” a külső légnyomás is. Így a kompresszor által végzett munka a *2. ábrán* bevonalkázott területtel lesz egyenlő: a dugattyú által végzett összes munkából le kell vonni a légköri nyomás által végzett p_0V_0 munkát.

Az izotermikus tágulási munka kiszámítási formája megtalálható a függvénytáblázatban:

$$W = NkT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Esetünkben izoterm összenyomásról van szó, és a külső munkát kell kiszámítanunk. Felhasználva az állapotegyenletet ($p_0V_0 = NkT_0$) és azt, hogy a térfogatot harmadrészére kell csökkenteni, az izoterm összenyomáshoz szükséges munka:

$$W_T = p_0V_0\ln 3.$$

Behelyettesítve $p_0 \approx 10^5$ Pa és $V_0 = 3$ m^3 értékeket:

$$W_T \approx 330\ \mathrm{kJ}.$$

Ehhez kell hozzáadnunk az átnyomáshoz szükséges munkát, amelyet úgy számíthatunk ki, hogy a dugattyút nyomó állandó erőt megszorozzuk a dugattyú elmozdulásával:

$$W_{\text{átnyomási}} = F\cdot s = 3p_0A\cdot\frac{V_0/3}{A} = p_0V_0 = 300\ \mathrm{kJ}.$$

Így az összes munka 630 kJ.

Most már csak a külső p_0 nyomás által végzett p_0V_0 munkát kell levonnunk, hogy megkapjuk a kompresszorra jutó részt:

$$W_{\text{kompresszor}} = 630\ \mathrm{kJ} - 300\ \mathrm{kJ} = 330\ \mathrm{kJ}.$$

Ezzel válaszoltunk a feladat kérdésére.

Kiegészítő megjegyzések.

1. Az izoterm munka kiszámítási formulájához úgy lehet eljutni, hogy az izoterma alatti területet határozzuk meg:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2}\frac{NkT}{V}dV = NkT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}dV, W = NkT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

2. Vajon nem lehet-e az izotermikus folyamat helyett más folyamattal, kevesebb befektetett munka árán is célhoz érni?

Adiabatikus összenyomáskor kevesebb munka is elég lenne a $3p_0$ nyomás eléréséhez. Viszont akkor fel is melegedne a gáz, amely azután az átnyomás közben kezdene lehűlni, s így csökkenne a nyomása. Épp ezért $3p_0$-nál jóval nagyobb nyomásra kellene adiabatikusan összenyomni, ehhez pedig már több munkára lenne szükség, mint az izotermikus esetben.

És ha először lehűtenénk a gázt? Állandó p_0 nyomáson $\frac{T_0}{3}$ hőmérsékletűre hűtve, a térfogata $\frac{V_0}{3}$ lenne. Eközben csak a külső légkör végezne munkát. Majd pedig hagynánk a gázt állandó $\frac{V_0}{3}$ térfogaton visszamelegedni T_0 hőmérsékletre, ekkor a nyomása elérné a $3p_0$ értéket, s csak az átnyomási munkát kellene a kompresszorral végeztetni. Lehet, hogy 200 kJ is elég lenne? Ez már ravaszabb gondolat, de azt lehet ellene felhozni, hogy a feladatban szó se volt arról, hogy a hajón még egy megfelelő hűtőberendezés is működik, amelyet felhasználhatunk a probléma megoldásához. De tegyük fel, hogy megengednénk a hűtőgép használatát, akkor viszont azt a munkát is illene számításba venni, amivel a hűtőgépet | pl. a hűtőgép kompresszorát | működtetni kell. Nem lenne nehéz megmutatni, hogy ismét „ráfizetünk": összesen több munkát kell végeznünk.

3. Úgy is ki lehet számítani a kompresszor által végzett munkát, hogy elképzeljük: a kezdetben 3 m^3-nyi levegőt egy „zsákba" zárjuk, és a zsákot lassan lehúzzuk 10 m-nyire a víz alá. Mivel x méter mélységben az izotermikusan összenyomott gázra $F(x) = 3 \cdot 10^4 \cdot (1 + x/10)^{-1}$ felhajtóerő hat, a lehúzás során végzett munka (SI-egységrendszerben számolva)

$$W = \int_0^{20} f(x)dx = \int_0^{20} \frac{3 \cdot 10^4}{1 + x/10} dx = 3 \cdot 10^5 \cdot \ln 3 \approx 330 \text{ kJ}.$$

2. feladat. Egy henger alakú edény szuperfolyékony héliummal van tele. Az edény magassága 1 dm, belső alapterülete 1 dm^2.

A héliumra kellő óvatossággal egy ugyancsak henger alakú, 1 dm magas, de csak 0,99 dm^2 alapterületű „dugót" helyezünk, és elengedjük. A dugó sűrűsége a hélium sűrűségével egyenlő.

| Hogyan mozog a dugó?

| Mennyi idő alatt ér le az edény aljára?

Az egész berendezés hőmérséklete 0 K közvetlen közelében van, a folyadék súrlódása és felületi feszültsége figyelmen kívül hagyható.

Gnädig Péter

Megoldás. Amikor elengedjük a dugót (*3. ábra*), ennek esését az alatta lévő folyadék hirtelen lefékezi bizonyos v_0 sebességre. Ezt a dugó további mozgása során kezdősebességnek fogjuk tekinteni.

Próbáljuk meg kiszámítani ezt a v_0 kezdősebességet, s csak utána keressük a választ a feladat kérdésére: Hogyan mozog a dugó?

Amint a dugó v_0 sebességgel elindul lefelé, oldalt felspriccel a folyadék. Jelöljük a folyadék kiömlési sebességét u_0-lal. Ez sokkal nagyobb, mint v_0, hiszen a folyadék összenyomhatatlansága miatt a ΔA területű résen ugyanannyi folyadéknak kell kifreccsennie, mint amennyi az A területű dugó alól kiszorul:

$$v_0 \cdot A = u_0 \cdot \Delta A.$$

v_0 kiszámításához lehet, hogy először u_0-t kell meghatároznunk? Ez elég is lenne, hiszen a feladat adataiból az $A : \Delta A = 100$ arány kiolvasható.

Milyen összefüggésben szerepelhet még a kiömlő folyadék sebessége? Mivel a folyadék súrlódása és felületi feszültsége figyelmen kívül hagyható, ezért érdemes lesz felírni az egész rendszerre a a munkatételt. Eszerint a rendszeren végzett munka a rendszer mozgási energiájának megváltozásával egyenlő.

Munkát végző erő a dugóra ható nehézségi erő. Amíg a dugó | a test |, egy kicsiny Δx-szel elmozdul lefelé, kiszorít Δm_{foly} tömegű folyadékot, amely u_0 sebességgel hagyja el a tartályt. Ezért írhatjuk:

$$m_{\text{test}} \cdot g \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \Delta m_{\text{foly}} \cdot u_0^2.$$

Igaz, a dugónak is megváltozott a mozgási energiája, de a sokkal kisebb sebesség miatt ezt a folyadék mozgási energiájának változásához képest elhanyagolhatjuk.

Helyettesítsük a fenti egyenletbe a következőket:

$$m_{\text{test}} = Al\varrho_{\text{test}} \qquad \text{és} \qquad \Delta m_{\text{foly}} = A\Delta x \varrho_{\text{foly}}.$$

Egyszerűsítés után a következő összefüggés adódik:

$$l\varrho_{\text{test}} g = \frac{1}{2} \varrho_{\text{foly}} u_0^2.$$

Ez éppen a „jó öreg" Bernoulli-törvény (1738) speciális esete, akár ebből is kiindulhattunk volna u_0 kiszámításához. Ha pedig azt is kihasználjuk, hogy a feladatban most a test és a folyadék sűrűsége egyenlő, a folyadék kiömlési sebességére kapjuk:

$$u_0 = \sqrt{2gl}.$$

Ez a Torricelli-féle kiöntési törvény (1646) még egy évszázaddal korábbról.

Akár át is fogalmazhatjuk a feladatot: Ahelyett, hogy „Hogyan mozog a dugó?", azt kérdezhetjük: „Hogyan mozog egy lyukas edényből súrlódásmentesen kiömlő folyadék esetén a folyadék felső szintje?" Azt már tudjuk, hogyan indul el. Kezdősebessége:

$$v_0 = \frac{\Delta A}{A} u_0 = \frac{\Delta A}{A}\sqrt{2gl}.$$

Tekintsünk most egy közbülső esetet a mozgás során. Tegyük fel, hogy a dugónak még h magasságú része áll ki a hengerből. A dugó úgy mozog ekkor, mint az oldalt lyukas edényben lévő folyadékok felső szintje abban a pillanatban, amikor ez a szint éppen h magasságban van a lyuk felett (*4. ábra*). Ugyanis mindkét esetben a súrlódásmentesen kiömlő folyadék sebessége

$$u = \sqrt{2gh},$$

és így a dugó sebessége

$$v = \frac{\Delta A}{A} u = \frac{\Delta A}{A}\sqrt{2gh}.$$

Ez még így is írható:

$$v = \sqrt{2\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 gh},$$

amiből látszik, hogy a dugó mozgása egyenletesen változik, lassulásának nagysága pedig

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 \cdot g = 10^{-4} g = 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A dugó mozgásának sebesség–idő grafikonja az *5. ábrán* látható.

A dugó sebessége éppen akkor csökken egyébként is zérusra, amikor a dugó alja eléri az edény alját, teteje pedig a hengeres edény tetejével kerül egy szintre. (Az analóg példában: a kiömlő folyadék felszíne a lyukhoz ér.)

Így a dugó leérkezéséig eltelt τ idő

$$\tau = \frac{2l}{v_0} = \frac{2l}{\frac{\Delta A}{A}\sqrt{2gl}} = \frac{A}{\Delta A}\sqrt{\frac{2l}{g}} = 14{,}1\ \mathrm{s}.$$

Kiegészítő megjegyzések.

1. A leérkezési idő kiszámításakor elhanyagoltuk azt az időtartamot, amennyi idő alatt a dugó felveszi a kezdősebességet, s azt az utat is, amit ez alatt megtesz. Az elhanyagolás jogosságát a következő becsléssel ellenőrizhetjük. A dugó valódi kezdősebessége nulla, de ebből az állapotából | feltételezésünk szerint igen hamar | felgyorsul a kérdéses v_0 sebességre. Amikor elengedjük, a dugó tetején és az aljánál egyaránt a légköri nyomás hat rá, tehát a dugó kezdeti gyorsulása g (szabadesés!). Ez a gyorsulás bizonyos τ_0 idő alatt gyarkorlatilag nullára ($10^{-4}g$-re) csökken, s a dugó sebessége v_0 lesz. Ha átlagosan $g/2$ értékkel számolunk, a $(g/2)\tau_0 = v_0$ összefüggésekből $\tau_0 = 2v_0/g = 2\cdot\frac{\Delta A}{A}\sqrt{\frac{2l}{g}} \approx 0{,}003$ s adódik. Ez ez idő és a dugó által ezalatt megtett kb. $v_0\tau_0/2 = 0{,}02$ mm út valóban elhanyagolható.

2. A szuperfolyékony héliumnak semmi más különleges extrém tulajdonságát | például, hogy lassan magától is kimászna az edényből | nem használtuk ki azon az egyen kívül, hogy nincs belső súrlódása. Éppen elég meglepő ez is!

3. feladat. Függőleges földelt fémsíktól d távolságra felfüggesztünk egy l hosszúságú fonálingát. Miután az m tömegű, kicsiny ingatestet elektromosan feltöltöttük, az inga újra egyensúlyi helyzetet vett fel, s most α szöget zár be a függőlegessel (*6. ábra*).

| Mekkora az ingatest töltése?

| Mennyivel kell közelebb vinnünk a fémsíkot az inga felfüggesztési pontjához, ha azt akarjuk, hogy a függőleges fémsík magához rántsa az ingát?

| Anélkül, hogy közelebb vinnénk, tudjuk-e úgy mozgatni a mindig függőleges fémsíkot, hogy hozzácsapódjon az inga?

A fonál szigetelő, a levegő hatása elhanyagolható, s a feladatot az alábbi numerikus értékek esetén oldjuk meg: $d = 0{,}5$ m; $l = 4$ m; $m = 10^{-3}$ kg; $\alpha = 1°$.

Radnai Gyula

Megoldás. Tisztázzuk először a fémsík szerepét! Tudjuk, hogy elektrosztatikus esetben a fémek felülete mindig ekvipotenciális. (Addig-addig mozognak, rendeződnek rajtuk a töltések, amíg ez az állapot ki nem alakul.) Ez azt jelenti, hogy a fémek felületénél az elektromos térerősségnek nem lehet érintő irányú komponense, vagyis a térerősség minden pontban merőleges a fém felületére. A feladatban ponttöltés és sík fémfelület szerepel, ezért az erőtérnek a *7(a) ábrán* vázolt szerkezetűnek kell lennie. Ezzel az erőtérrel *ekvivalens* egy olyan dipólus erőterének „egyik fele", amelyet egymástól $2x$ távolságra lévő Q és $-Q$ ponttöltések hoznak létre, ahogyan azt a *7(b) ábrán* vázoltuk.

A fémsík hatása tehát minden tekintetben helyettesíthető egy $-Q$ nagyságú ú.n. „tükörtöltés" hatásával. Ennek a felismerésnek köszönhetően azt az erőt, amit a fémsík fejt ki a Q tötésre, úgy is kiszámíthatjuk, mint a tükörtöltés által kifejtett vonzóerőt.

A Coulomb-erőn kívül a Q töltésre még két erő hat (*8. ábra*): a nehézségi erő és a fonálerő. A három erő eredője akkor zérus | akkor van egyensúly |, ha a Coulomb-erő és a nehézségi erő hányadosa $\operatorname{tg}\alpha$-val egyenlő. Ebből határozhatjuk meg a Q töltés keresett értékét.

$$mg\operatorname{tg}\alpha = k\frac{Q^2}{[2(d-l\sin\alpha)]^2}.$$

Átrendezés után:

$$Q = 2(d-l\sin\alpha)\sqrt{\frac{mg}{k}\operatorname{tg}\alpha},$$

($k = 9\cdot 10^9\ \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$, $g = 9{,}81\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a többi paraméter értéke a feladatban adott). Behelyettesítések után kapjuk:

$$Q = 1{,}187\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}.$$

Mi történik, ha a fémsíkot közelebb visszük az ingához? A Coulomb-erő nő, mivel a tükörtöltéstől való távolság csökken. A nehézségi erő nem változik, tehát egy nagyobb α szög esetén tud újra beállni az egyensúly. De van-e ilyen új α szög? Hiszen az inga kilendülésével a Coulomb-erő tovább nő, és lehet, hogy az inga meg se áll addig, amíg hozzá nem csapódik a fémsíkhoz.

Meg kell határoznunk azt az összefüggést, amely egyensúly esetén fennáll d és α között. Formálisan tekintsük d-t α függvényének, s fejezzük ki ezt a függvényt az egyensúlyra már felírt fenti összefüggésből. Ezt kapjuk:

$$d = d(\alpha) = l\sin\alpha + \sqrt{\frac{kQ^2}{4mg}}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

A függvény menete viszonylag kis α értékek környezetében a *9. ábrán* látható módon egy minimumot mutat. Van tehát egy olyan legkisebb d érték, amelynél közelebb nem vihetjük a fémsíkot. Ha közelebb visszük, nincs egyensúlyi állapot, tehát hozzácsapódik az inga a fémsíkhoz.

Határozzuk meg d minimumát!

(Akiknek gondot okoz e kissé bonyolult függvény differenciálása, úgy segíthetnek magukon, ha | felismerve, hogy csak kis szögekről van szó |, $\sin\alpha$ és $\operatorname{tg}\alpha$ helyére α-t írnak. Ekkor csak hatványfüggvényeket kell deriválni, s a végeredmény legfeljebb a negyedik–ötödik értékes jegyben tér el a pontos eredménytől.)

A minimum helyére (α^*) kapjuk:

$$\sin 2\alpha^*(\approx 2\alpha^*) = \sqrt[3]{\frac{kQ^2}{2mgl^2}}, \qquad \text{ebből} \quad \alpha^* = 2{,}12°,$$

d legkisebb lehetséges értékére pedig ez adódik:

$$d_{\min} = 0{,}4435\ \mathrm{m} = 44{,}35\ \mathrm{cm}.$$

Mivel a fémsík eredetileg 0,5 méterre volt az inga felfüggesztési pontjától, ezért ahhoz, hogy a fémsík magához rántsa az ingát, legalább $\Delta d = 5{,}65$ cm-rel közelebb kell vinni.

Már csak arra kell válaszolnunk, hogy tudjuk-e úgy mozgatni a fél méterre lévő fémsíkot, hogy hozzácsapódjon az inga akkor is, ha sohasem kerül a fémsík fél méternél közelebb a felfüggesztési ponthoz.

Igen, tudjuk: *„be kell lengetni az ingát"*, mint egy hintát. Elöször eltávolítjuk a fémsíkot, ekkor az inga hátralendül. Amikor az inga elindul visszafelé, visszahozzuk a fémsíkot, hogy vonzóerejével növelje a lengés amplitúdóját. Lényegében az inga lengésével szinkronban, de mindig ellentétes fázisban kell mozgatni a fémsíkot. Akármilyen kis amplitúdóval is rezegtetjük a fémsíkot, ha ez megfelelő fázisban történik, előbb-utóbb hozzácsapódik az inga.

Kiegészítő megjegyzések.

1. Tanulságos áttekinteni a feladat energetikai megoldását is. Nemcsak azért, mert ez egy második megoldás, hanem azért is, mert olyan új felismeréshez vezet, amely az előző megoldásból nem derült ki.

A fémsíkon influált (elektromosan megosztott) töltésrendszer potenciális energiájának felírása elég bonyolult feladat, ezért ismét alkalmazzuk a tükörtöltéses módszert. Az inga + fémsík rendszer helyett tekintsük az inga + tükörképinga rendszert (*10. ábra*), és írjuk fel e két ingából álló rendszer öszes potenciális energiáját! Ez a két ingatest gravitációs helyzeti energiáiból és az elektrosztatikus kölcsönhatási energiáiból tevődik össze (az utóbbi negatív).

$$U = mg(l - l\cos\alpha) + mg(l - l\cos\alpha) - k\frac{Q^2}{2(d - l\sin\alpha)}.$$

Egyetlen inga potenciális energiája ennek a fele lesz:

$$U_1 = mg(l - l\cos\alpha) - k\frac{Q^2}{4(d - l\sin\alpha)}.$$

Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk most is a kis szögek esetével, legyen

$$x = l\sin\alpha \approx k\alpha, \quad \text{és} \quad h = l - l\cos\alpha \approx l\frac{\alpha^2}{2}.$$

$$\text{Ezzel} U_1(\alpha) = \frac{mg}{2}l\alpha^2 - k\frac{Q^2}{4}\frac{1}{d - l\alpha},$$

$$\text{vagy áttérve az } x = l\alpha \text{ változóra:} U_1(x) = \frac{mg}{2l}x^2 - \frac{kQ^2}{4}\frac{1}{d - x}.$$

Ezt az $U_1(x)$ függvényt x szerint differenciálva kapjuk meg az ingatestre ható (x irányú) erő -1-szeresét, tehát az erő:

$$F_1(x) = -\frac{dU_1(x)}{dx} = \frac{mg}{l}x - \frac{kQ^2}{4}\frac{1}{(d - x)^2}.$$

Mind az $U_1(x)$, mind az $F_1(x)$ függvények menete a paraméterek értékeitől függ. Ha m, g, l, k, Q állandó, akkor egyedül d-től. A *11. ábrán* vázoltunk három különböző esetet. Az a) esetben a potenciális energia minimuma jelöli ki az inga stabilis egyensúlyi helyzetét, a maximum egy labilis egyensúlyt jelez. A c) esetben nincs egyensúlyi helyzet. A kettő közti átmenetet, a határesetet mutatja az ábra b) része, amikor a potenciális energiának „vízszintes” érintőjű inflexiós pontja van, itt valósulhat meg még utoljára egyensúlyi helyzet. Az ehhez tartozó d paraméterérték lesz d legkisebb értéke.

$x = x^*$ helyen tehát $\frac{dU_1}{dx} = 0$ és $\frac{dF_1}{dx} = 0$ is igaz.

Ebből a két feltevésből az alábbi egyenletekre jutunk:

$$2x(d - x)^2 = \frac{kQ^2l}{2mg}, \qquad \text{illetve} \qquad (d - x)^3 = \frac{kQ^2l}{2mg}.$$

Ezek szerint $2x = d - x$, vagyis $x = \frac{d}{3}$ a határesetben!

A fenti jelölésekkel: $x^* = \frac{d_{\min}}{3}$.

Ez az a szép és érdekes eredmény, ami nem jött ki az első megoldás során: a fémsík egészen addig közelíthető az ingához, amíg az inga kilendüléséhez tartozó x érték el nem éri az éppen akkori d távolság harmadrészét. Ha elérte, s még tovább közelítjük a fémsíkot, akkor már nekicsapódik az inga.

Természetesen a feltételi egyenletek bármelyikébe behelyettesítve $x = \frac{d}{3}$ értékét, megkapjuk $d = d_{\min}$ értékét:

$$d = d_{\min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{kQ^2l}{2mg}} = 0{,}4435 \text{ m}$$

2. A feladat harmadik kérdésére a „belengetésen” kívül más ötletes válaszok, megoldási javaslatok is születtek. Ilyen például a fémsík körbeforgatása, amely körmozgásra csábítja az ingatestet. Voltak, akik a fémsík saját síkjában történő mozgatással próbálkoztak, számítva az elektronok tehetetlenségére, s a mozgó töltésekre ható Lorentz erővel is többen próbálkoztak | nem sok sikerrel. Elág sok jó fizikai szemléletű versenyző akadt, aki | ha nem is tudta megoldani a feladat nehéz, középső részét |, erre a befejező kérdésre jól válaszolt.

A verseny eredménye

Megosztott I–II. díjat nyert egyenlő helyezésben a következő három versenyző:

Horváth Péter, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (felső fénykép), *Horváth Gábor* tanítványa;

Kovács Krisztián, a békéscsabai Kemény Gábor Műszaki Szakközépiskola IV. osztályos tanulója (középső fénykép), *Mekis László* és *Varga István* tanítványa;

Varga Dezső, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium IV. osztályos tanulója (alsó fénykép), *id. Szabó Kálmán* tanítványa.

III. díjat nyert egyenlő helyezésben a következő hét versenyző:

Borsányi Szabolcs, a budapesti Piarista Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Görbe László* tanítványa;

Burcsi Péter, a pápai Türr István Gimnázium III. osztályos tanulója, *Németh Zsolt* tanítványa;

Futó Gábor, az ELTE TTK matematikus szakos hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett, mint *Horváth Gábor* tanítványa;

Juhász Sándor, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa;

Koblinger Egmont, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa;

Mizera Ferenc, az ELTE TTK fizikus szakos hallgatója, aki Szlovákiában, Rév-Komáromban érettségizett, mint *Szakál Ildikó*, *Spátai Lotár* és *Szabó Endre* tanítványa;

Tóth Gábor Zsolt, a budapesti Árpád Gimnázium III. osztályos tanulója, *Vankó Péter* tanítványa.

Dicséretben részesültek, s erről oklevelet kaptak a verseny 11–15. helyezettjei:

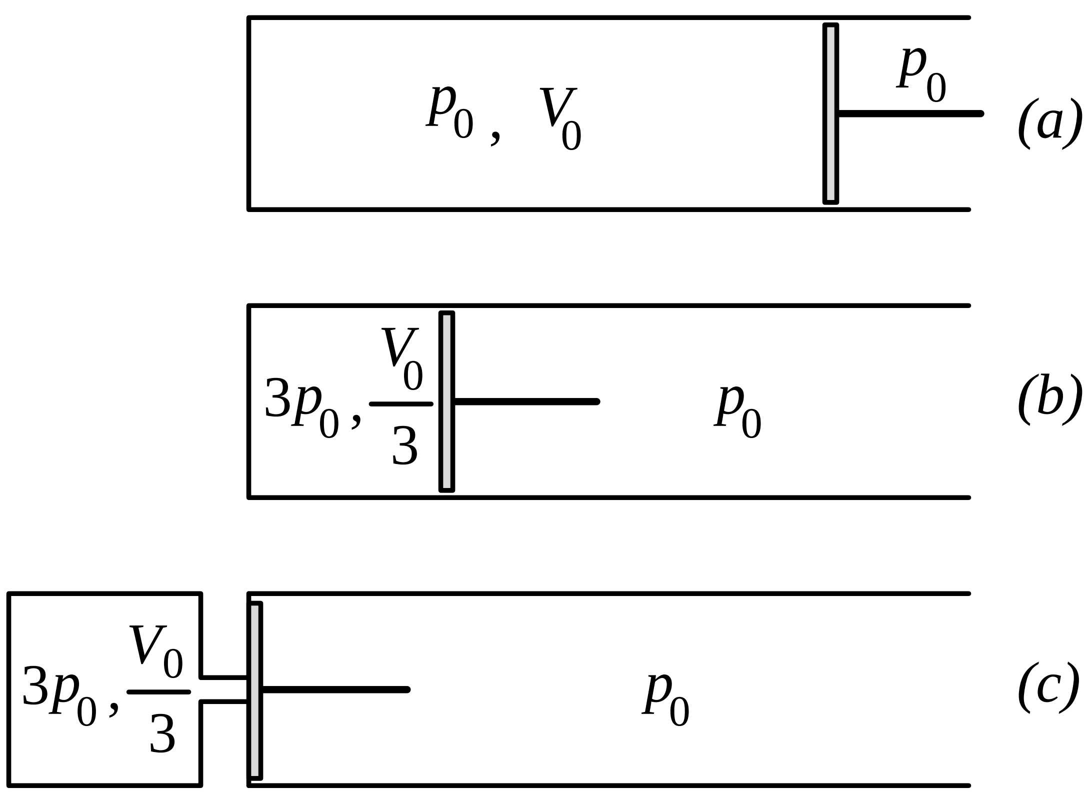
11. **Halbritter András**, a BME mérnök–fizikus szakos hallgatója, aki a győri Czuczor Gergely Bencés Gimnáziumban érettségizett, mint *Csonka László* tanítványa; 12–13. **Bárász Mihály**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Várhegyi Péter**, a BME mérnök–fizikus szakos hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett, mint *Horváth Gábor* tanítványa; 14–15. **Koncz Imre**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium II. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Lovas Rezső**, a debreceni KLTE Gyakorló Gimnáziumának III. osztályos tanulója, *Dudics Pál*, *Kirsch Éva* és *Szegedi Ervin* tanítványa.

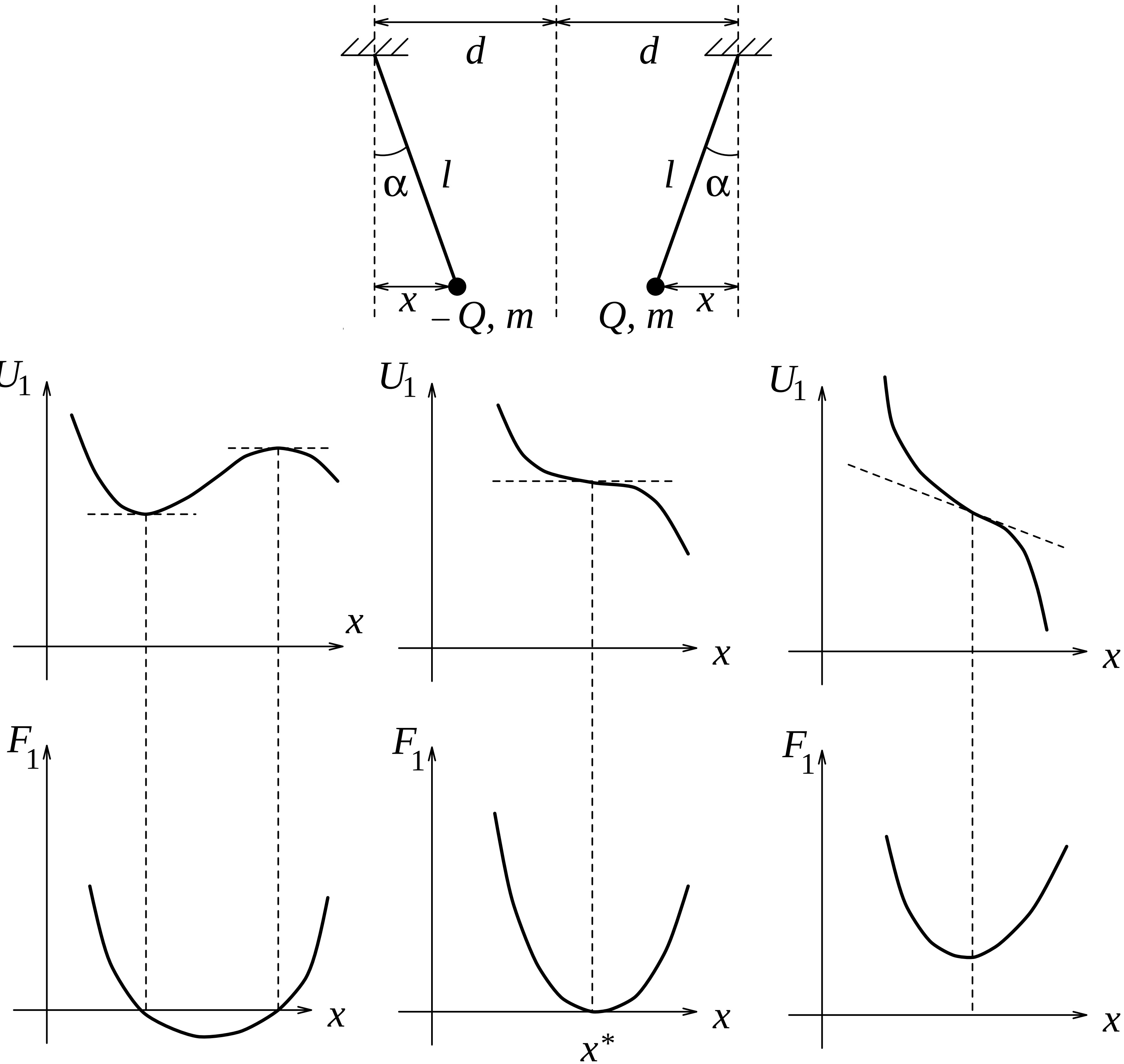
Jegyzőkönyvi dicséretben részesültek a 16–20. helyezett versenyzők egyenlő helyezésben:

Feldmann Márton, a soproni Vas- és Villamosipari Szakközépiskola IV. osztályos tanulója, *Lendvay Péterné* tanítványa; **Juhász Bertalan**, a debreceni KLTE Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója, *Dudics Pál* tanítványa; **Madarassy Pál**, a ELTE TTK térképész szakos hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett, mint *Horváth Gábor* tanítványa; **Radnóti Gergely**, a paksi Vak Bottyán Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváthné Szabó Julianna* és *Gálosiné Kimle Mária* tanítványa; **Salk Miklós**, a pécsi Babits Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Koncz Károly* tanítványa.

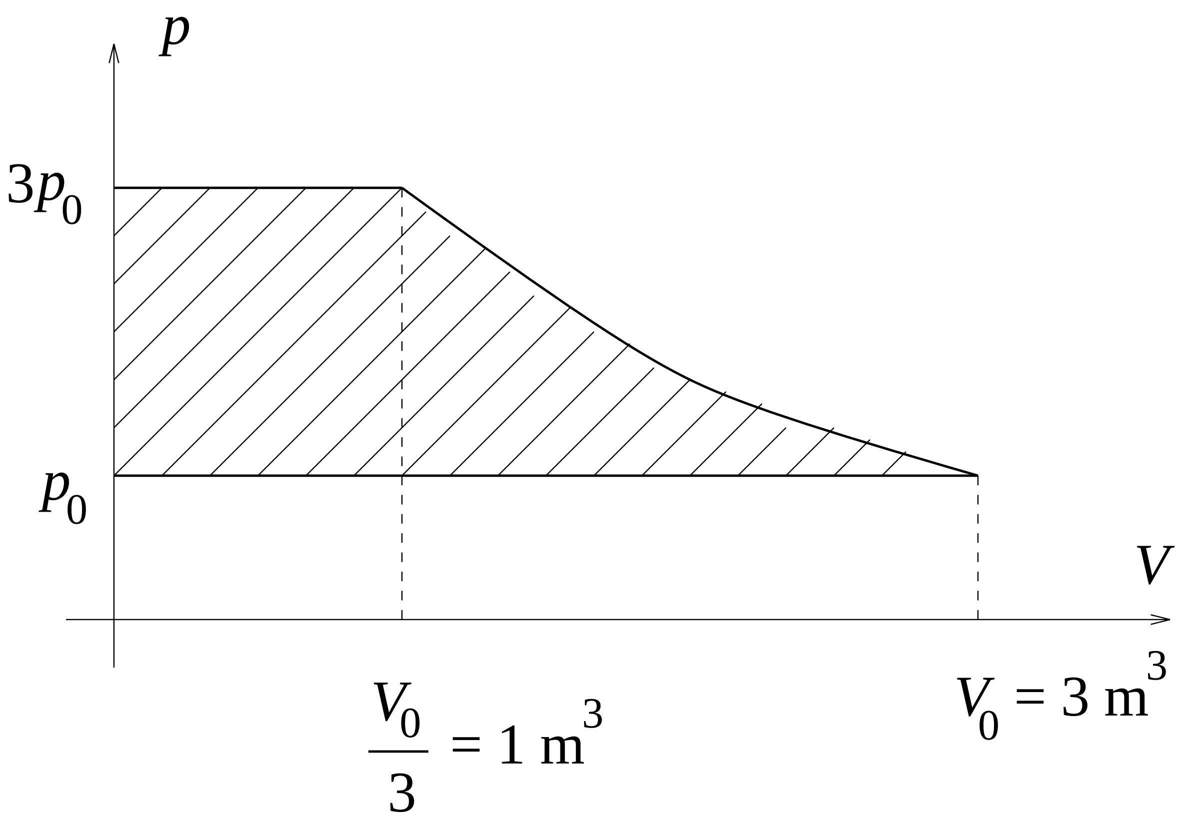
Gratulálunk a nyerteseknek!

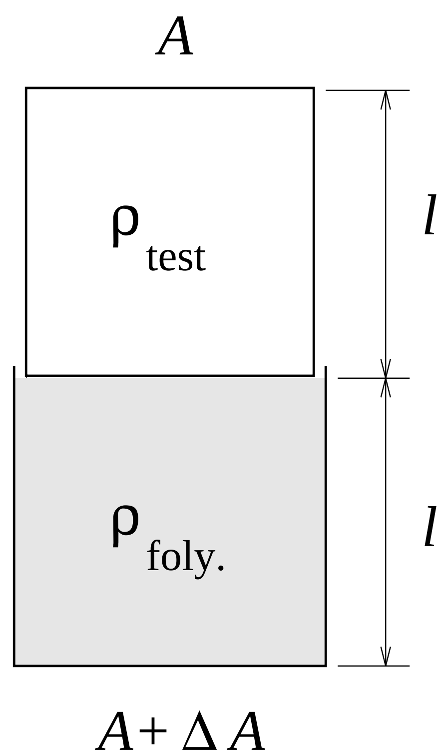
Radnai Gyula

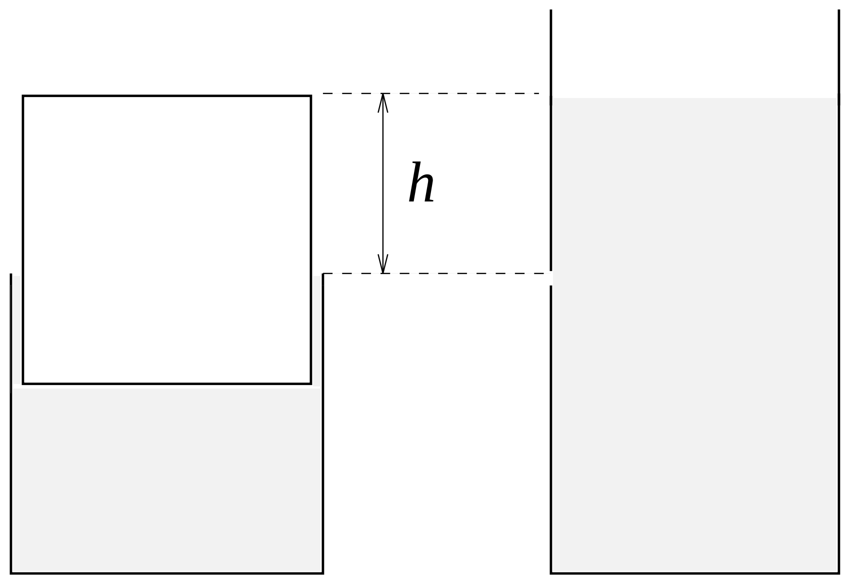




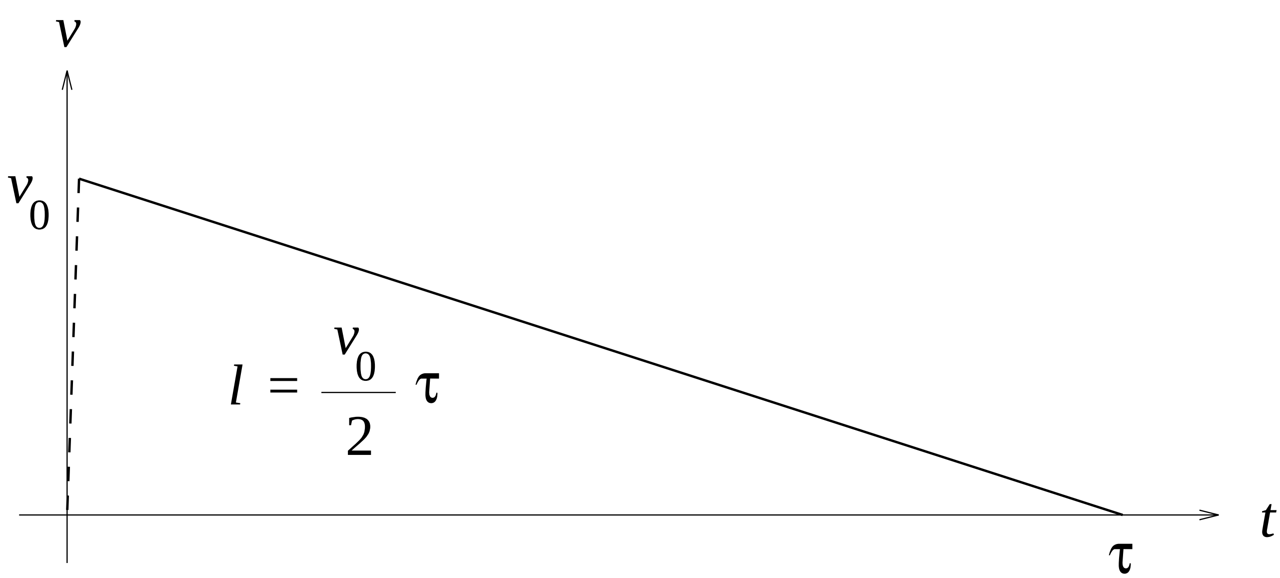
a) $d>d_{\text{min}}$ b) $d=d_{\text{min}}$ c) $d<d_{\text{min}}$


p
3p0
p0
V
V0/3 = 1 m3
V0 = 3 m3

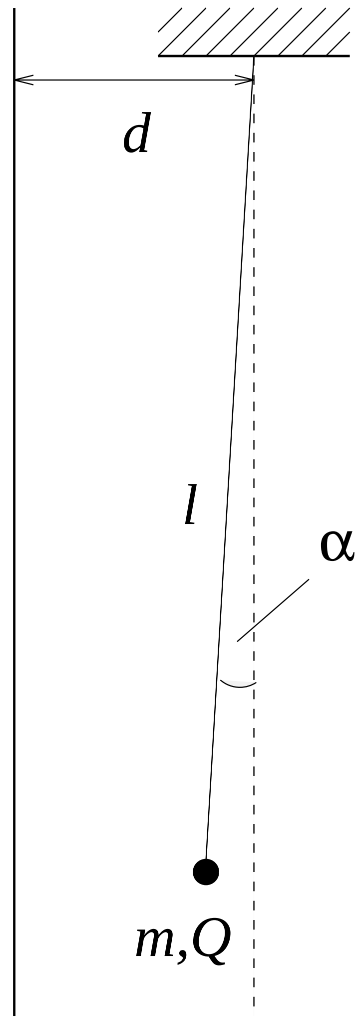

A
ρ test
l
ρ foly.
l
A+ Δ A

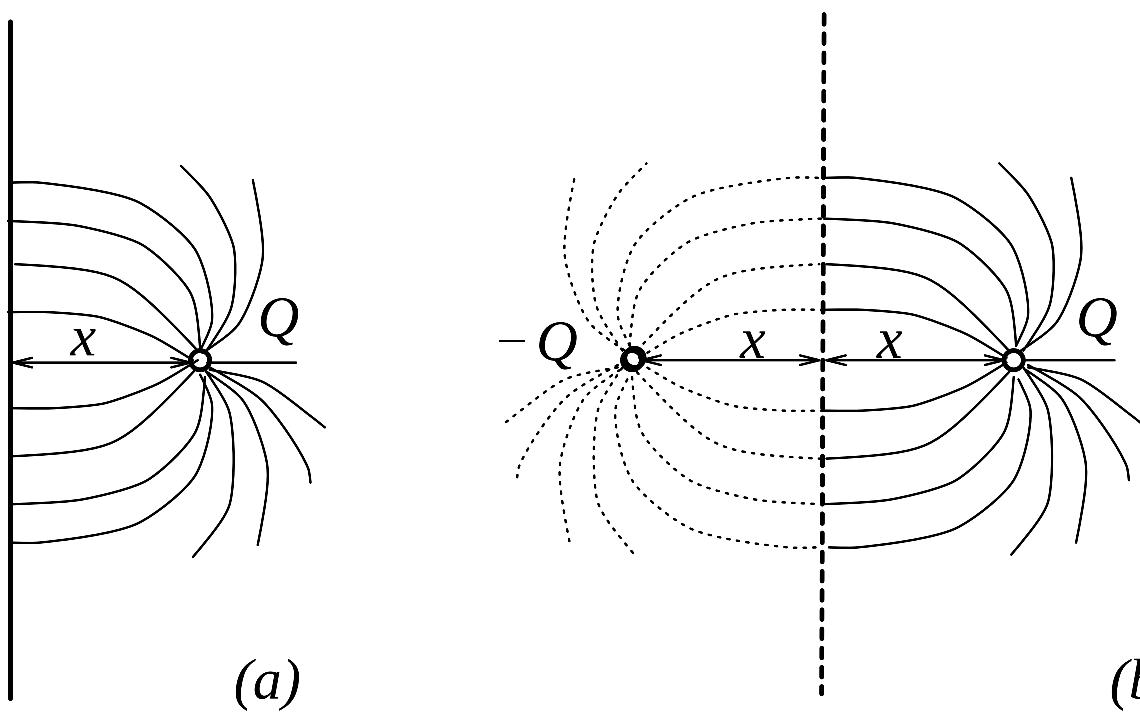


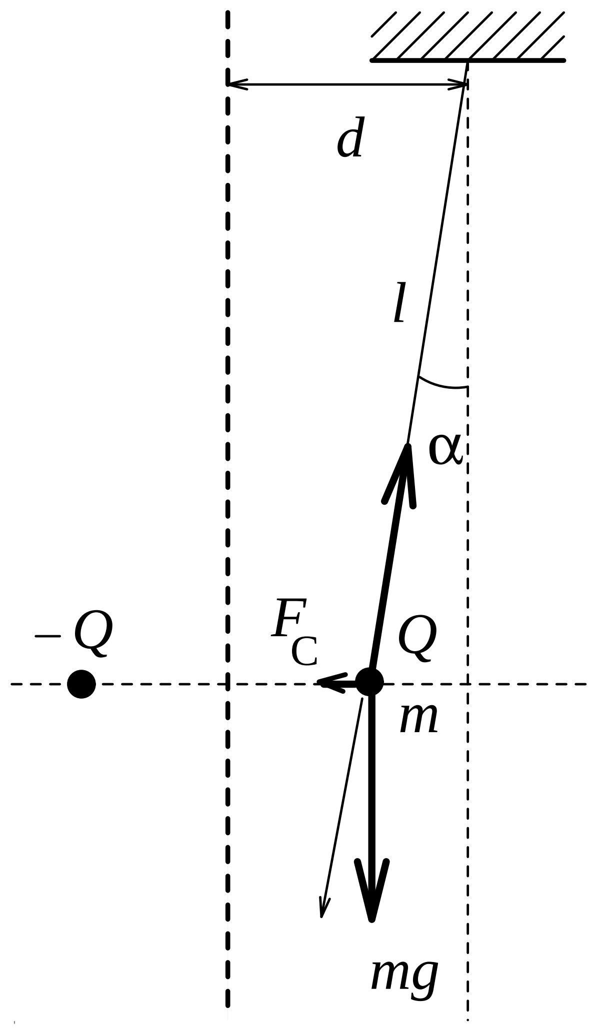
h



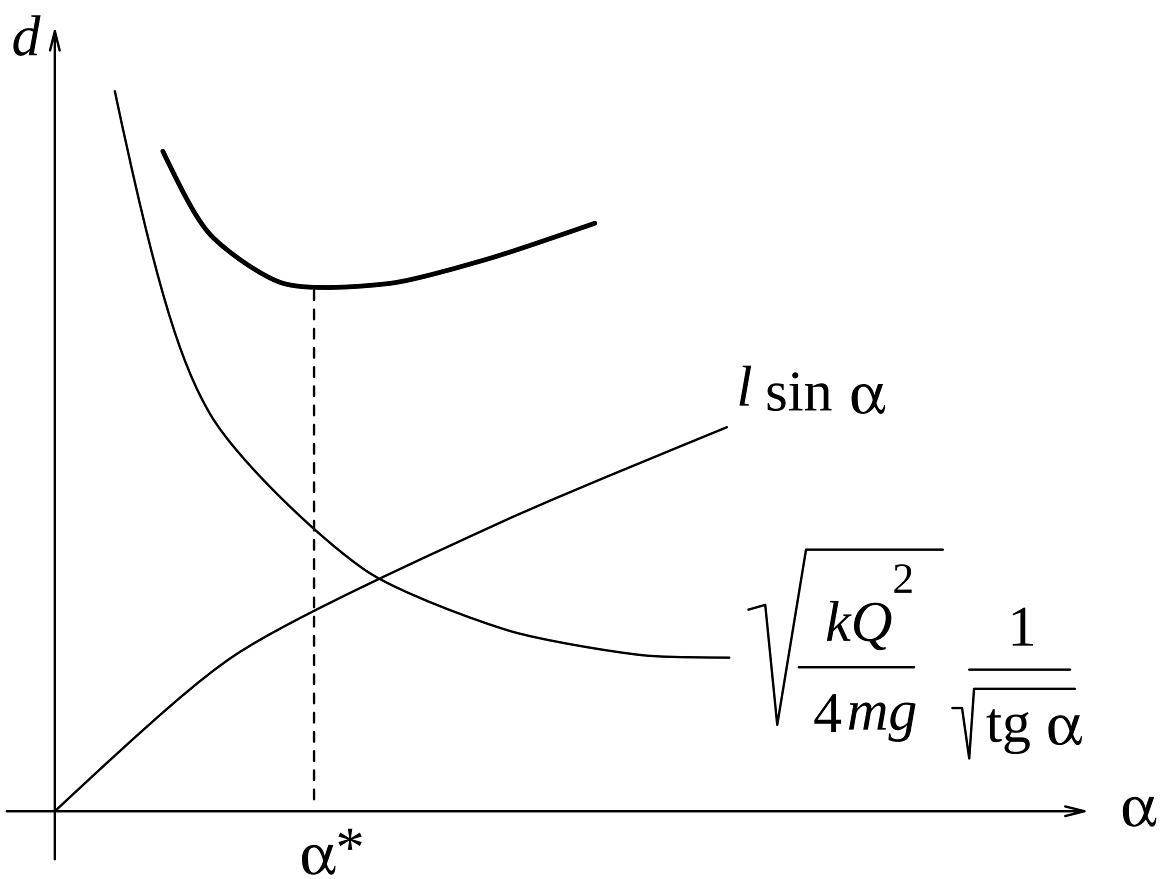
v
v_0
$l = \frac{v_0}{2}\tau$
t
τ


d
l
α
m,Q


x
Q
−Q
x
x
Q
(a)
(b)



d
l
α
−Q
F_C
Q
m
mg



d
l sin α
$\sqrt{\frac{kQ^2}{4mg}}\ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}$
α
α*