A KöMaL 1995. évi 1. számában a soros R–L–C köröknél fellépő rezonanciajelenségekkel, azok egyszerű (felsőbb matematikai ismereteket nem igénylő) tárgyalásával foglalkoztunk. Vizsgálódásainkat most kiterjesztjük a mechanikai rezgésekre, és felhívjuk a figyelmet a két jelenségkör közötti analógiákra is.[1]

Ha egy rezgő testre a rugóerőn kívül egy periodikus kényszerítőerő, továbbá a sebességgel egyenesen arányos nagyságú csillapítóerő is hat, akkor csillapított kényszerrezgésről beszélünk. Ennek a mozgásnak az ideális változatával foglalkoznak a hivatkozott tankönyvek is.

A mozgás leírására forgó vektorokat használhatunk, ahogyan a váltakozó áram leírására is. Induljunk ki a váltóáramnál használt mennyiségek vektoraiból, és állapítsuk meg | analógiák segítségével |, hogy melyik mechanikai mennyiség felel meg nekik a rezgés esetén. Tekintsük az ideális soros R–L–C áramkört, illetve egy csavarrugóhoz erősített testet, amelyre a fentebb említett erők hatnak.

Tudjuk, hogy egy kondenzátorba úgy lehet sok töltést belepréselni, ha nagy feszültséget kapcsolunk rá. Ebből a legkönnyebb azt az analógiát megállapítani, hogy a kondenzátor egy rugóhoz hasonlít. Tehát a rugóerőnek megfeleltetjük a kondenzátor sarkain lévő feszültséget. Az ohmos ellenálláson lévő feszültségnek nyilván a csillapítóerőt feleltethetjük meg. A teljes R–L–C kör sarkain lévő feszültségnek, vagyis a külső kényszerítő feszültségnek pedig a kényszerítőerőt (más szóval gerjesztőerőt) feleltetjük meg. Legyen e gerjesztőerő körfrekvenciája ω, amelyet a vizsgálatok során folyamatosan lehet változtatni, nullától igen nagy értékig. Legyen továbbá a rugóhoz kapcsolt test szabad rezgéseinek körfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, az úgynevezett saját(kör)frekvencia.

Az önindukciós tekercsre jutó feszültségnek nehezebb megtalálni az analogonját, de hát már úgysem maradt más, mint a tömeg és a gyorsulás szorzata, amit vektornak tekinthetünk. Természetesen azt az ideális esetet vizsgáljuk, amikor mindegyik erő azonos frekvenciával, időben szinuszosan változik.

A harmonikus rezgőmozgás vizsgálatából tudjuk, hogy a sebesség negyed periódussal, 90°-kal siet a kitéréshez képest, illetve, hogy a gyorsulás ellentétes fázisban van a kitéréssel, vagyis 180°-kal siet hozzá képest.

Ha a gerjesztőerő vektorának jele G, a rugóerőé R, a csillapítóerőé C, továbbá, ha a tömeg és a gyorsulás szorzatát T-vel jelöljük, illetve megállapodunk abban, hogy ezek a betűk a vektorok abszolút értékét képviselik, tehát pozitívak, akkor a szóban forgó erőkre az *1. ábra* szerinti vektorsokszöget rajzolhatjuk fel.

A vektorok egymáshoz képesti helyzetét a következők magyarázzák: A gyorsulás, illetve a tömeg és gyorsulás szorzatát reprezentáló T vektor egy egyenesbe esik a kitéréssel, de azzal ellentétes irányú. Hasonlóan a rugóerőt képviselő R is egy egyenesbe esik a kitéréssel. A C vektor merőleges T-re, mert ez a vektor a sebességgel esik egy egyenesbe, a sebesség pedig 90°-kal megelőzi a kitérést. A G, C és R vektorok vektori összege tehát T kell legyen, de ez csak úgy valósítható meg, hogy G vektor „ferdén" áll T-hez képest, vagyis a kitérésvektorral, amely T-vel ellentétes irányú, s az ábrába nincsen berajzolva, a G vektor φ szöget zár be.

Minthogy az említett vektorok ω szögsebességgel forgó vektorok, hasonlóan a váltakozó áramnál használt eljáráshoz, a *2. ábrán* látható módon is ábrázolhatjuk őket. Először a V sebességvektort vesszük fel, mert ez felel meg az áramerősség vektorának. Ugyanis a rugóerőt a kondenzátor feszültségével azonosítottuk, de a kondenzátor feszültsége egyenlő a töltés és a kapacitás hányadosával, míg a rugóerő egyenesen arányos a kitéréssel. Ebből következik, hogy a kitérés a kondenzátor töltésének a megfelelője. A töltés időegységre eső változása az áramerősség, aminek akkor a mechanikai mennyiségek körében a kitérés időegységre eső változása, vagyis a sebesség kell megfeleljen.

A sebességhez képest 90°-kal lemarad a kitérés X vektora, viszont G vektor φ szöggel jár X előtt, C vektor pedig a V sebességgel ellentétes irányú.

Vegyük úgy, hogy ezek a forgó vektorok a nekik megfelelő mechanikai mennyiségek amplitúdóját képviselik. Az ábrákból a következőket olvashatjuk le a vektorok hosszára vonatkozólag: $G\cos(180^\circ-\varphi)+R=T$ és $G\sin(180^\circ-\varphi)=C$.

Használjuk a továbbiakban a Budó: Mechanika, 19. paragrafusának jelöléseit, tehát G helyett ezután F_0-t írunk, R helyett kA-t, T helyett $mA\omega^2$-et és C helyett $\beta A\omega$-t. Ezekkel a fenti két egyenletet így írhatjuk le:

$$F_0\cos\varphi = kA - mA\omega^2, F_0\sin\varphi = \beta A\omega.$$

Ezek hányadosából a kitérés és a gerjesztőerő közötti fáziskülönbségre rögtön kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta A\omega}{kA - mA\omega^2},$$

illetve a kitérés amplitúdójának négyzetére

$$A^2 = \frac{F_0^2}{(k-m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}.$$

Látható, hogy mindkettő függ a gerjesztőerő aktuális frekvenciájától.

[1] Az egyes mennyiségek jelölése Budó Ágoston: Mechanika tankönyvének 19. paragrafusát, illetve a forgó vektorok vonatkozásában Holics László gimnáziumi III. osztályos könyve függelékének 29. pontját követi.

Vezessünk be a hivatkozott könyvnek megfelelően további egyszerűsítő jelöléseket! Legyen $f_0 = F_0/m$, $\kappa = \beta/(2m)$, illetve a már említett $\omega_0^2 = k/m$. Ezekkel a fáziseltolódás mértékére írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\cdot\kappa\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2},$$

az amplitúdónak a frekvenciától való függésére pedig ezt kapjuk:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\kappa^2\omega^2}}.$$

Foglalkozzunk most a *rezonanciának* nevezett esettel. Ez lényegében azt jelenti, hogy a gerjesztőerő ω körfrekvenciáját igen kicsi értékekből kiindulva növeljük igen nagy értékekig, miközben a rezgő test amplitúdóját figyeljük. Ha az amplitúdót az ω körfrekvencia függvényében ábrázoljuk is, akkor az úgynevezett rezonanciagörbét vesszük fel. Ilyen görbéket mutat a *3. ábra.*

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy a görbék nem az origóból indulnak ki az (ω, A) koordináta-rendszerben, hanem, mint az a fenti amplitúdóképletből is leolvasható, f_0/ω_0^2 kezdeti értékből. (f_0/ω_0^2 dimenziója természetesen méter.)

A 3. ábrán több görbe látható, amelyek között az tesz különbséget, hogy milyen erős csillapítás hat a rezgő testre, vagyis mekkora β, illetve ennek következtében κ értéke. Mindegyik görbe ugyanonnan indul, később maximumot ér el, majd pedig zérus értékhez tart igen nagy ω esetén. A legalsó görbéhez tartozik a legnagyobb csillapítás, a felette következőknél csökken.

A maximumok helye, vagyis a rezonancia helye érdekes. Látható, hogy erős csillapítás esetén az ω_0 sajátkörfrekvenciánál jóval kisebb ω_r körfrekvenciánál van a görbe maximuma.

A maximum helyét az amplitúdó képlet nevezőjében lévő gyök alatti mennyiség átalakításával kaphatjuk meg. Átalakítjuk $\omega^2 = z$-ben másodfokú függvénnyé, majd ennek maximumát a szokásos „$-b/2a$” helyen keressük:

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\kappa\omega^2 = z^2+\left(4\kappa^2-2\omega_0^2\right)z+\omega_0^4;$$
$$„-b/2a\text{”} = \omega_0^2-2\kappa^2 = \omega_r^2, \quad \text{tehát} \quad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2-2\kappa^2} < \omega_0.$$

A gondosabb elemzés tehát azt mutatja, hogy ha a kényszerrezgést végző testre ható gerjesztőerő frekvenciáját igen kis frekvenciáktól indulva folyamatosan növeljük, akkor a kényszerrezgés amplitúdója egy ν_r frekvenciánál a legnagyobb értékét veszi fel, *s ez a ν_r frekvencia a ν_0 sajátfrekvencia közelébe esik, de annál mindig kisebb.*

Ez a jelenség az *amplitúdórezonancia.*

Ha a csillapítóhatás gyenge, mert például levegőben rezeg a kényszerrezgést végző test, akkor κ^2 másodrendűen kicsiny érték, s ilyenkor gyakorlatilag nem lehet megkülönböztetni a maximális amplitúdóhoz tartozó ω_r gerjesztőfrekvenciát ω_0-tól.

Az amplitúdó maximális értékét megkapjuk, ha ω_r értékét A képletébe helyettesítjük:

$$A\left(\omega_r\right) = \frac{f_0}{2\kappa\cdot\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}} > A(\omega_0).$$

A gerjesztőerő és a kitérés nincsen azonos fázisban. A közöttük lévő fázisszög tangensét az előzőekben levezettük. $\operatorname{tg}\varphi$ ott kapott képletéből látható, hogy bármilyen nem nulla ω esetén φ is nullától különböző szög.

Minthogy a rezonanciához tartozó ω_r körfrekvencia kisebb ω_0-nál, de gyenge csillapítás esetén annak közelében van, a képletből látszik, hogy rezonancia esetén $\operatorname{tg}\varphi$-re igen nagy szám adódik, azaz $\varphi \approx 90°$. Ilyenkor tehát a gerjesztőerő forgóvektora körülbelül merőleges a kitérés forgóvektorára, azaz éppen a sebesség vektorával párhuzamos és egyirányú. Emiatt a rezgő testtel állandóan energiát közöl ($F\cdot v =$ teljesítmény!). Ha a csillapítás nem tudja felemészteni a test energianövekményét, akkor állandóan növekszik az amplitúdó, egészen az eszköz tönkremeneteléig…

Kérdezhetjük, hogy a kényszerrezgést végző test *sebességamplitúdója* hogyan függ a gerjesztőerő frekvenciájától. Az előző sorokból érezhető, hogy a sebességamplitúdó akkor lehet a legnagyobb, amikor a gerjesztőerő forgóvektora pontosan merőleges a kitérés forgóvektorára, vagyis amikor $\varphi = 90°$. A sebességamplitúdó, mint tudjuk, $A\omega$, azaz

$$\frac{f_0\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\kappa^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{\omega^2}+4\kappa^2}},$$

ami valóban akkor maximális, ha $\omega = \omega_0$. A legnagyobb sebességamplitúdó pedig $f_0/(2\kappa)$.

Érdemes a *gyorsulás amplitúdóját* is megvizsgálni. Ez $A\cdot\omega^2$, vagyis

$$\frac{f_0\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\kappa^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{\omega^4}+\frac{4\kappa^2}{\omega^2}}}.$$

Ez utóbbi tört maximuma ott van, ahol a nevezőjében lévő gyök alatti mennyiség minimális. A gyök alatti mennyiséget $1/\omega^2 \equiv z$-ben másodfokú függvénnyé alakítjuk, s megkeressük a minimumát:

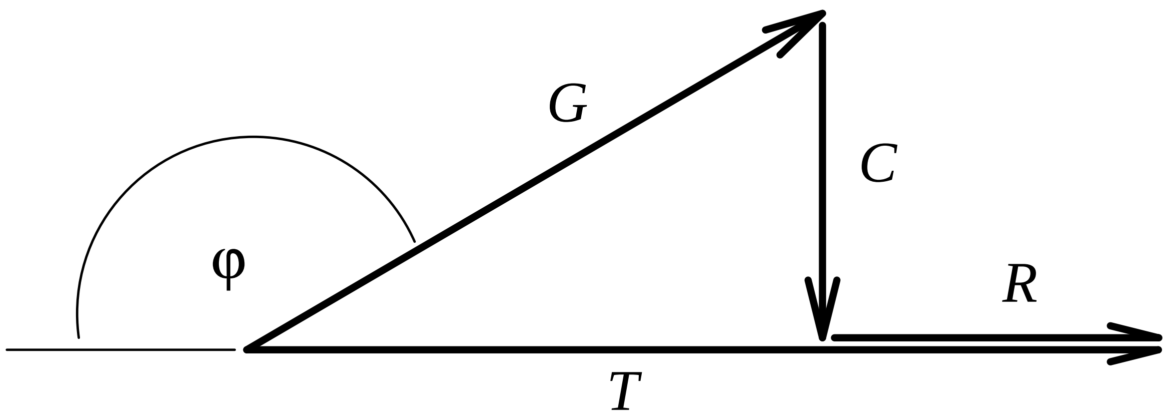
$$\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{\omega^4}+\frac{4\kappa}{\omega^2}=\omega_0^4\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\left(4\kappa^2-2\omega_0^2\right)\frac{1}{\omega^2}+1=\omega_0^4 z^2+2\left(2\kappa^2-\omega_0^2\right)z+1,$$

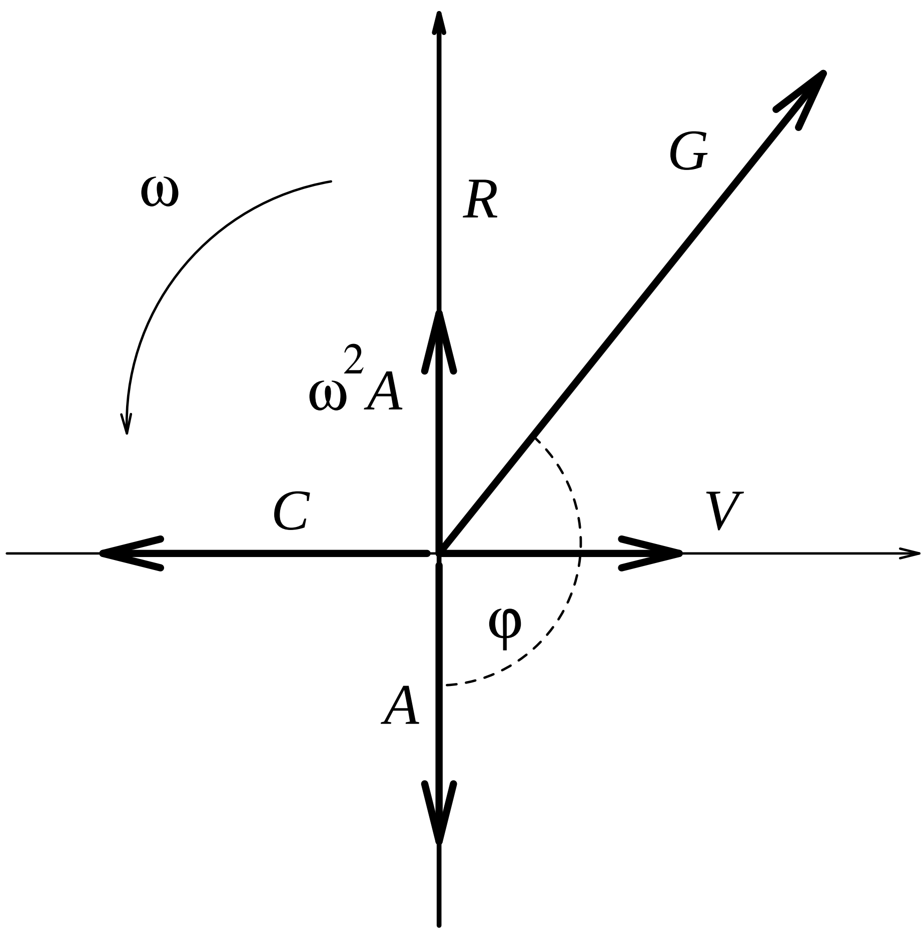
$$„-b/2a\text{"}=\frac{2\left(\omega_0^2-2\kappa^2\right)}{2\omega_0^4}=\frac{\omega_0^2-2\kappa}{\omega_0^4}=\frac{1}{\omega_g^2},\qquad \omega_g=\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2-2\kappa^2}}>\omega_0.$$

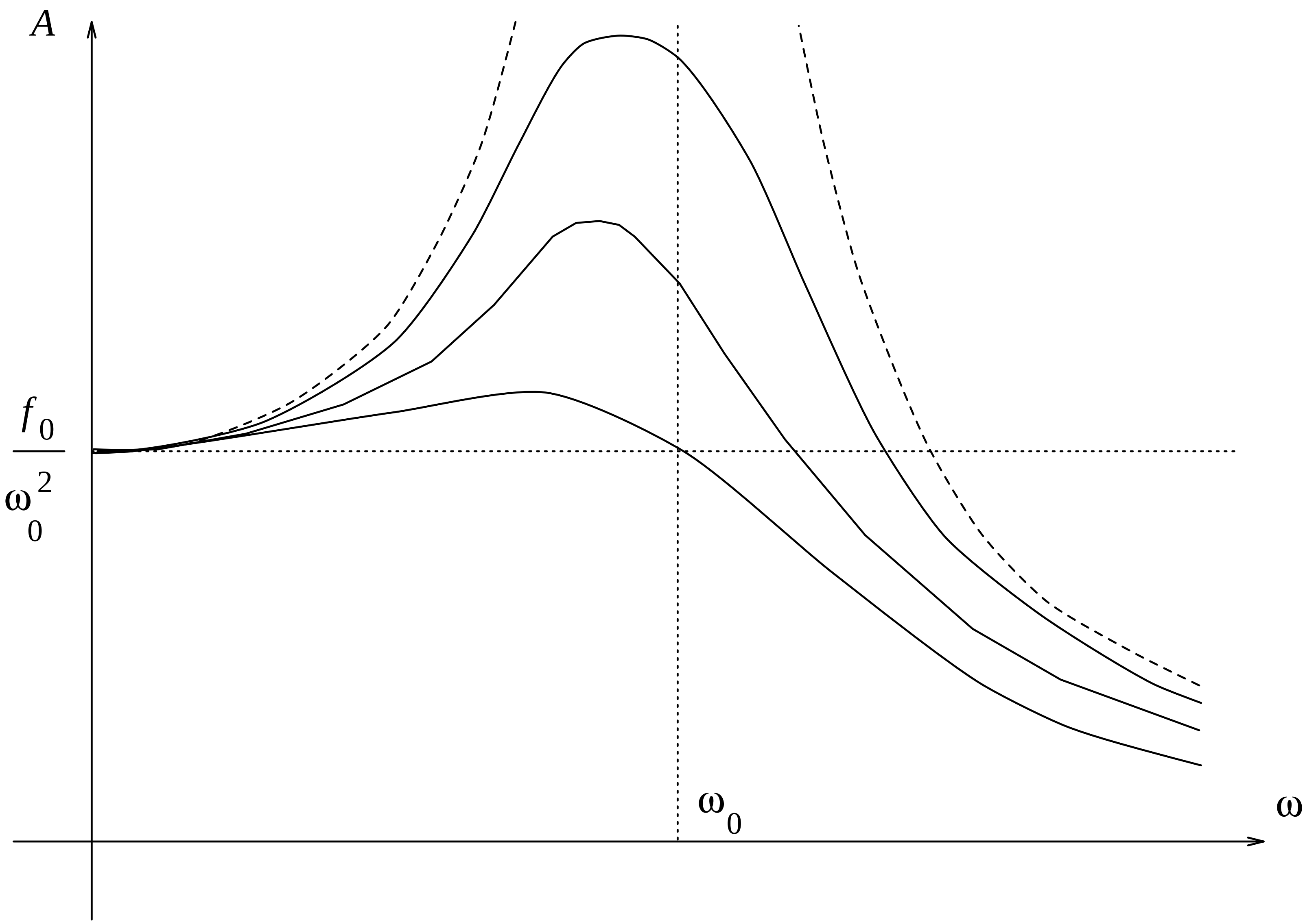
A gyorsulásamplitúdó tehát mindig ω_0-nál nagyobb körfrekvenciáknál maximális. A *4. ábra* a kényszerrezgést végző test gyorsulásamplitúdójának a gerjesztőerő ω körfrekvenciájától való függését mutatja, különböző erősségű csillapítások mellett. A grafikonokon is látható, hogy maximumuk ω_0-nál nagyobb ω_g körfrekvenciánál található. (Hasonlóan az R–L–C áramkör tekercsén lévő feszültséghez, a kezdetben megállapított analógiának megfelelően.)

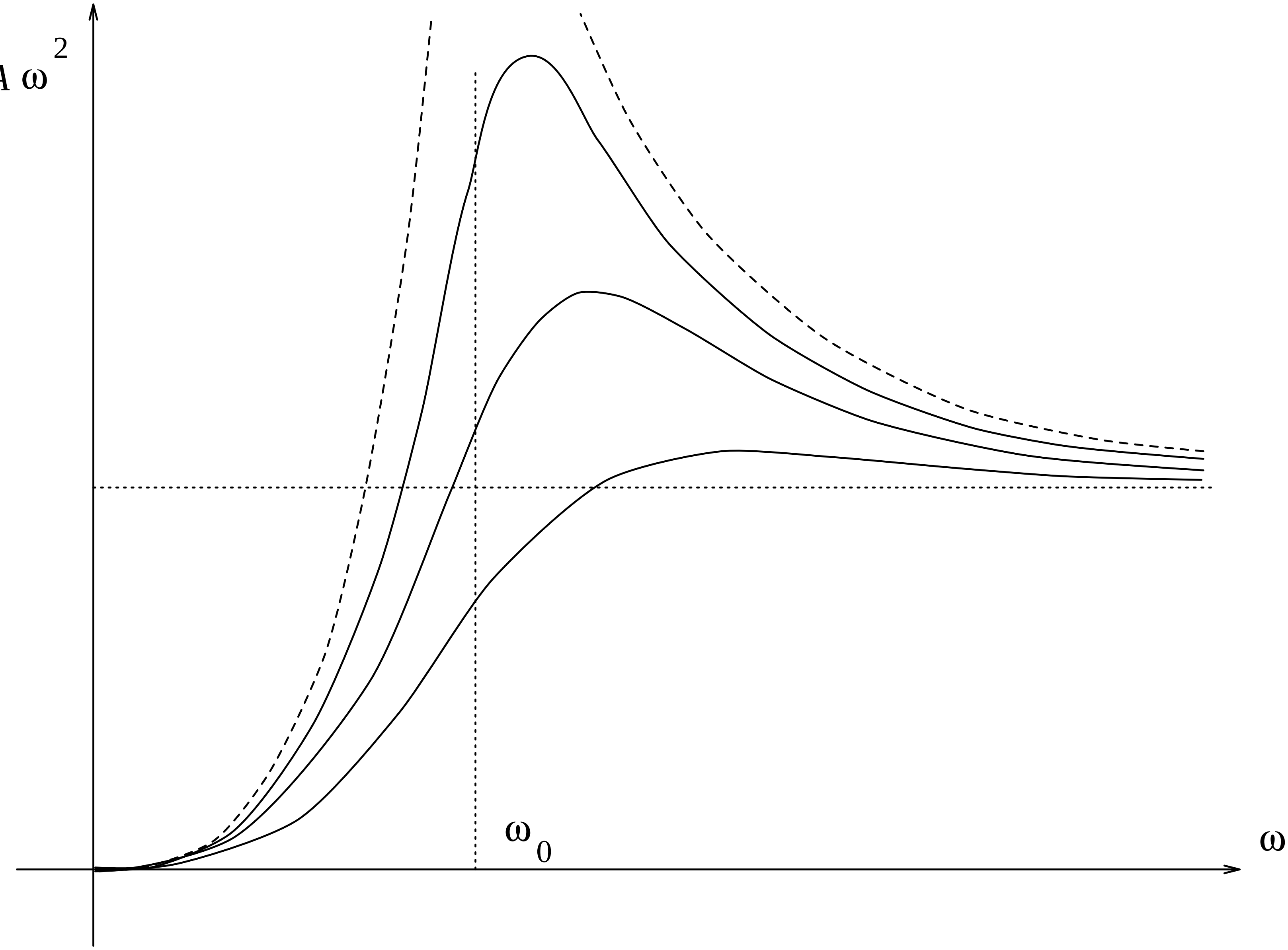
Érdemes felfigyelni még arra, hogy ω_0 éppen ω_r és ω_g mértani közepe, vagyis $\omega_0=\sqrt{\omega_r\cdot\omega_g}$.

Légrádi Imre






A
$\frac{f_0}{\omega_0^2}$
ω_0
ω



A ω 2
ω 0
ω