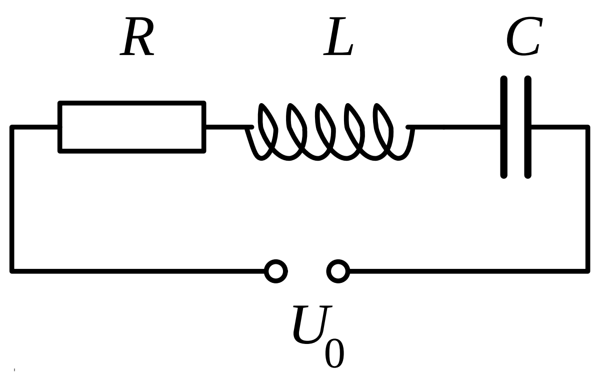
Az ideális soros RLC kör vizsgálata során több tankönyvben találkozhatunk a következő gondolattal:

„Ha a kapacitív és induktív ellenállás értéke megegyezik, akkor a fáziseltolódás szöge nulla, és adott kapocsfeszültség esetén maximális áram folyik át az RLC körön. Ennek következtében az egyes kapcsolási elemeken maximális feszültség jelenik meg. Ezt az esetet **feszültségi rezonanciának** nevezzük."

Az alábbiakban arra szeretnék rámutatni, hogy ezt az esetet nem helyes feszültségi rezonanciának nevezni, mert a feszültség maximuma nem ekkor következik be.



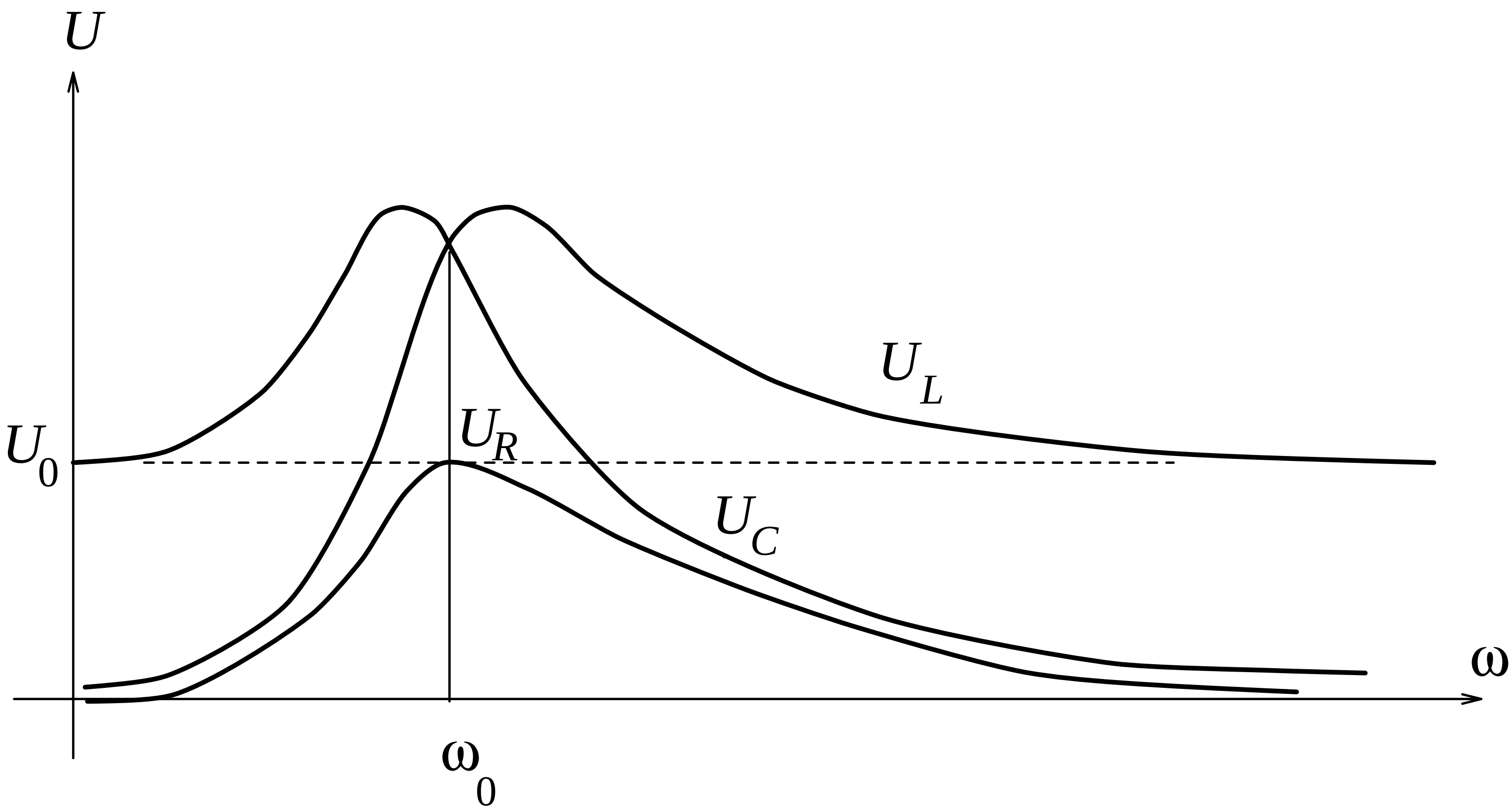
1. ábra

Tekintsük az ideális elemekből felépített soros RLC kört, amin azt értjük, hogy R-ben koncentráltuk az összes ohmos ellenállást, L tiszta induktív ellenállás, és C tiszta kapacitív ellenállás. A kapcsolás (*1. ábra*) közismert. Kapcsoljuk az RLC kört színuszos változóáramú áramforrásra, amelynek ω körfrekvenciáját folyamatosan lehet változtatni. Legyen a kapocsfeszültség mindenkor állandó U_0 érték. Mint tudjuk, ilyenkor az impedancia abszolút értéke

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}.$$

Az áramkörben folyó áram erőssége $I = U_0/Z$. Ennek az áramnak az ω körfrekvencia függvényében akkor van maximuma, amikor $X_0 = X_L$, azaz amikor $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Az ennek megfelelő frekvenciát valóban nevezhetjük rezonanciafrekvenciának. Mivel ilyenkor nemcsak az a fontos jelenség áll elő, hogy az áram értéke maximális, hanem az is, hogy az áram éppen *azonos fázisban van a kapocsfeszültséggel*, vagyis a fáziseltolódás értéke nulla; ezért az elektrotechnika ezt az esetet *fázisrezonanciának* nevezi.

A későbbi egyszerű és szemléletes tárgyalás érdekében itt hívom fel a figyelmet arra, hogy az áramerősség görbéjét az ω körfrekvencia függvényében felrajzolva, a fázisrezonancia helyén nyilván azt láthatjuk, hogy a görbe érintője ezen a helyen „vízszintes".



2. ábra

Nézzük a kondenzátorra eső feszültség függését a körfrekvenciától. Ez Ohm törvénye szerint: $U_C = I \cdot X_C = I \cdot (1/\omega C)$. Nyilván, ha $\omega = 0$, azaz egyenáram esetén, $U_C = U_0$. Ha ezután a körfrekvenciát folyamatosan növeljük, és a kondenzátor sarkain mérhető U_C feszültséget ω függvényében ábrázoljuk, akkor U_C-nek az előbbi U_0 értékből kiindulva folytonos, sima görbét kell adnia. Ha ezt a görbét az áramerősség maximumához tartozó rezonancia-körfrekvencia környezetében vizsgáljuk, akkor azt állapíthatjuk meg, hogy a görbe az $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ helyen „ereszkedően" halad át. Hogy ez így van, azt a következőképpen láthatjuk be: $U_C = I \cdot (1/\omega C)$. Ez egy kéttényezős szorzat. Az első tényező az áramerősség. Mint már említettük, a szóban forgó helyen I görbéjének érintője vízszintes, vagyis azt mondhatjuk, hogy kis körfrekvenciaváltozást tekintve e hely környezetében az áramerősség *állandó*. A második tényező a kondenzátor váltóáramú ellenállása, amely ω növekedésével *csökken*. Ha tehát az áramerősség maximumához tartozó körfrekvenciánál kicsit kisebb frekvenciától haladunk a nála nagyobb frekvenciák felé, akkor U_C-t úgy számíthatjuk ki, hogy állandó áramerősséget szorzunk csökkenő ellenállással, amely szorzás eredménye *csökkenő feszültség* kell legyen.

Ha tehát a $0 - \omega_0$ körfrekvencia intervallumban van maximális U_C érték, akkor annak ω_0-nál *kisebb* körfrekvenciánál kell lennie. Más szavakkal, a kondenzátoron mérhető legnagyobb feszültség nem ω_0-nál, hanem annál kisebb körfrekvenciánál van! Vagyis a *feszültségrezonancia* nem ω_0-nál van!

Keressük meg, mekkora ω körfrekvenciánál van a feszültségnek maximuma. Minthogy

$$U_C = I \cdot X_C = \frac{U_0}{Z} \cdot X_C = \frac{U_0 \cdot \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} = \frac{U_0}{C\sqrt{R^2\omega^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 \omega^2}}.$$

Látható, hogy U_C-nek annál a körfrekvenciánál van maximuma, amely körfrekvenciánál a nevezőnek minimuma van, vagyis elég a gyök alatti mennyiséget vizsgálni minimum tekintetében.

A gyök alatti mennyiség $\omega^2 = x$-ben másodfokú kifejezéssé alakítható:

$$R^2\omega^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 \omega^2 = R^2\omega^2 + \left(\frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{2L}{C} + \omega^2 L^2\right)\omega^2 =$$
$$= L^2\omega^4 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)\omega^2 + \frac{1}{C^2} = L^2x^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)x + \frac{1}{C^2}.$$

A kapott kifejezésben a másodfokú tag együtthatója pozitív, tehát a kifejezésnek létezik minimuma, mégpedig a másodfokú függvények vizsgálatából jól ismert „$-b/2a$" helyen, vagyis a minimum helyére vonatkozólag fennáll:

$$\omega^2 = \frac{\frac{2L}{C} - R^2}{2L^2} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}, \qquad \text{azaz} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} < \omega_0.$$

Természetesen ehhez az eredményhez deriválással is eljuthatunk.

Szemléltetésképpen vegyünk fel számadatokat is. Legyen $L = 10$ henry, $C = 5$ μF és $R = 1000$ ohm. Ebben az esetben a kondenzátoron mérhető feszültség maximumához tartozó körfrekvencia $\omega = 122{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$, amely valóban kisebb $\omega_0 = 141{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$-nél.

Vizsgáljuk meg azt is, hogy az ideális tekercsen mérhető feszültségnek hol van maximuma. Jelöljük U_L-lel a tekercsen lévő feszültséget, akkor, mint fentebb is, írhatjuk, hogy

$$U_L = I \cdot X_L = \frac{U_0 \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} = \frac{U_0 \cdot L}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2}}}.$$

Ismét láthatjuk, hogy U_L-nek annál az ω-nál van maximuma, amelynél a nevezőben lévő gyök alatti mennyiségnek minimuma van. A gyök alatti mennyiséget átírhatjuk egy másodfokú függvény formájába, amelyben a változó $1/\omega^2 = x$:

$$\frac{R^2}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} = \frac{R^2}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{2L}{C} + \omega^2 L^2\right) \cdot \frac{1}{\omega^2} =$$
$$= \frac{1}{C^2}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) \cdot \frac{1}{\omega^2} + L^2 = \frac{1}{C^2}x^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)x + L^2.$$

A kapott másodfokú függvényben a másodfokú tag együtthatója pozitív, tehát a függvénynek létezik minimuma, amelynek helye az előbbiekhez hasonlóan „$-b/2a$”. Ennek megfelelően

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{2LC - R^2C^2}{2}, \quad \omega^2 = \frac{2}{2LC - R^2C^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} > \omega_0.$$

Természetesen ezt az eredményt is megkaphatnánk deriválás segítségével.

Az előzőekben felvett numerikus adatokkal most $\omega = 163{,}3\ \mathrm{s}^{-1}$-et kapunk arra a körfrekvenciára, amelynél az ideális tekercsen mérhető feszültség a legnagyobb. Látható, hogy ez nagyobb ω_0-nál, aminek magyarázata a kondenzátornál elmondottakhoz hasonlóan adható meg: $U_L = I \cdot X_L = I \cdot \omega L$. Minthogy ω_0 környezetében I állandónak tekinthető, X_L viszont a kisebb körfrekvenciáktól a nagyobbak felé haladva *növekszik*, ezért a két tényező szorzata is növekszik ω_0 környezetében. U_L görbéje tehát „emelkedőleg” halad át ω_0 helyen, viszont igen nagy körfrekvenciánál vissza kell térnie U_0 érték közelébe, hiszen igen nagy frekvencián a kondenzátor ellenállása zérushoz tart, a tekercsé viszont igen nagy lesz az ohmos ellenállásához képest, így jóformán az egész U_0 a tekercsre esik. Ha tehát U_L valahol maximális értékű, akkor az csak ω_0-nál nagyobb körfrekvencián lehet.

Azt mondhatjuk tehát, hogy az ideális elemekből álló soros RLC körben a *feszültségrezonancia* nem $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ körfrekvenciánál következik be, hanem a kondenzátoron ω_0-nál kisebb, a tekercsen pedig ω_0-nál nagyobb körfrekvencián.

Érdekes felfigyelni még a következőkre.

Először a numerikus adatokkal kapott körfrekvenciákat vizsgálva képezzük a két feszültségrezonanciához tartozó körfrekvencia *mértani középarányosát:*

$$\sqrt{122{,}5 \cdot 163{,}3} = 141{,}4.$$

Ez utóbbi viszont ω_0-nak *tűnik*!

Ezen *intuíció* alapján kimondjuk a következő tételt: A soros RLC körben a kondenzátor feszültségrezonanciájához tartozó körfrekvenciának és a tekercs feszültségrezonanciájához tartozó körfrekvenciának a mértani középarányosa a fázisrezonanciához tartozó körfrekvencia.

Bizonyítás: A két előbb kapott körfrekvenciaképlet közvetlen felhasználásával:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{2L - R^2C}{2L^2C} \cdot \frac{2}{(2L - R^2C) \cdot C}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Légrádi Imre