I. megoldás. Az állítás úgy is tekinthető, mint egy kör négy különböző hosszúságú húrja közti összefüggés, tehát írható így is:

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_4}+\frac{1}{d_7}=\frac{1}{d_1}, \tag{2}$$

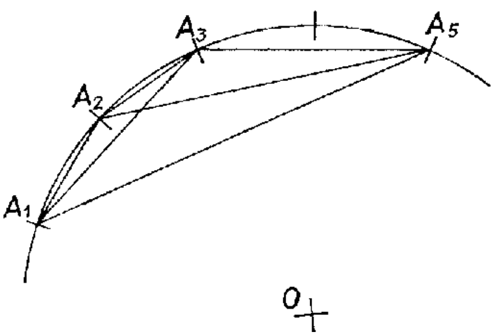
ahol d_i a szabályos 15-szög kerületéből i számú egymáshoz csatlakozó oldalszakasz két végpontja közti távolság (átló, ill. d_1 maga az oldal).

Most (2) szakaszait kifejezzük a körülírt kör $OA_1=1$ sugarával és a középponti szögekkel, mindjárt figyelembe véve, hogy $d_7=d_8$. A d_1-hez tartozó középponti szög fele $12°$, így $d_1=2\sin 12°$, és $d_i=2\sin i\cdot 12°$. A bal és a jobb oldal különbsége ismert azonosságok alkalmazásával

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\sin 24°}+\frac{1}{2\sin 48°}\right)-\left(\frac{1}{2\sin 12°}-\frac{1}{2\sin 96°}\right)=\\ &=\frac{\sin 48°+\sin 24°}{4\sin 12°\cos 12°\sin 48°}-\frac{\sin 96°-\sin 12°}{4\sin 12°\sin 48°\cos 48°}=\\ &=\frac{\sin 36°}{2\sin 12°\sin 48°}-\frac{\cos 54°}{2\sin 12°\sin 48°}.\end{aligned}$$

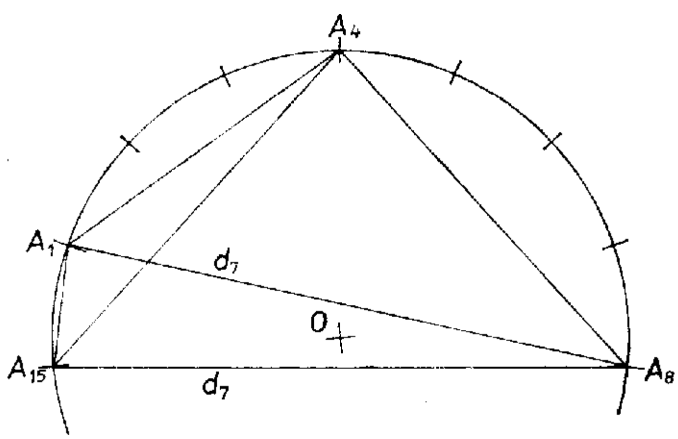
A második tagban $\sin 42°=\cos 48°$ alapján egyszerűsítettünk és mivel hasonlóan a két számláló is egyenlő, a kifejezés értéke 0. Az állítást bebizonyítottuk.

II. megoldás. Nem nehéz kiválasztani a 15-szög csúcsai közül olyan 4-et, amelyek közti 6 távolság a (2)-beliek közül vett hárommal egyenlő, és fellép még egy más hosszúságú átló is.



1. ábra

Ilyen egyrészt a $A_1A_2A_3A_5$ négyszög (oldalai: $d_1, d_1 d_2, d_4$, átlói d_2 és d_3 (1. ábra), másrészt a $A_1\ A_4\ A_8\ A_{15}$ ($d_3,\ d_4,\ d_7,\ d_1$, ill. $d_7,\ d_4$, 2. ábra).



2. ábra

Így kétszer alkalmazhatjuk a húrnégyszögekre vonatkozó Ptolemaiosz-tételt, amely szerint a konvex húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemben levő oldalpárjainak szorzatából képezett összeggel:

$$\begin{aligned}d_2d_3&=d_1d_2+d_1d_4,\\ d_4d_7&=d_3d_7+d_4d_1.\end{aligned}$$

Felírjuk d_3 innen kivehető két kifejezésének egyenlőségét:

$$d_1 + \frac{d_1 d_4}{d_2} = d_4 - \frac{d_1 d_4}{d_7},$$

és ezt $d_1 d_4$-gyel osztva a (2)-vel ekvivalens összefüggést kapunk:

$$\frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_7}.$$

Megjegyzés. Javasoljuk a komplex számokkal bánni tudó olvasóinknak, bizonyítsák be a feladat állítását komplex számok felhasználásával is. Hasonlóan jó gyakorlásul szolgálhat a feladat az inverzióhoz értők számára is.