1. C ponton át a DA-val húzott párhuzamos az AB oldalt az E pontban metszi. $AE = 26$, $EB = 39 - 26 = 13$ egység. Az EBC háromszög derékszögű, hiszen $EC = 5$ egység és $EC^2 + CB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = EB^2$. A trapéz m magassága megegyezik az ECB háromszög EB átfogóhoz tartozó magasságával, így $13m = 5 \cdot 12$, $m = \dfrac{60}{13}$.

A trapéz területe:
$$T = \frac{26+39}{2} \cdot \frac{60}{13} = 150 \text{ területegység.}$$

A trapéz szögei: $67{,}38°$, $22{,}62°$, $157{,}38°$ és $112{,}62°$.

2. Legyen $BB_1 = s$ és $BB_1A\sphericalangle = \varphi$. Ekkor $AB_1 = B_1C = 2s$ és $BB_1C\sphericalangle = 180° - \varphi$. Az AB_1B és a CB_1B háromszögekben az AB, illetve BC oldalra írjuk fel a koszinusztételt:

$$10 = s + 4s^2 - 2 \cdot s \cdot 2s \cdot \cos\varphi, \qquad 30 = s^2 + 4s^2 + 2 \cdot s \cdot 2s \cdot \cos\varphi$$

ahonnan $40 = 10s^2$, $s = 2$ és így $\cos\varphi = \dfrac{5}{8}$. $AC = 4s = 8$ egység, és $T = s \cdot 2s \cdot \sin\varphi$. Mivel $\sin^2\varphi = 1 - \dfrac{25}{64} = \dfrac{39}{64}$ és $\sin\varphi > 0$, azért $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$, tehát a háromszög területe

$$T = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39} \text{ területegység.}$$

3. a) A negyedik év végén

$$20\,000\left(1{,}25^4 + 1{,}25^3 + 1{,}25^2 + 1{,}25\right) = 20\,000 \cdot 1{,}25 \cdot \frac{1{,}25^4 - 1}{1{,}25 - 1} =$$
$$= 100\,000 \cdot \left(1{,}25^4 - 1\right) \approx 144\,141 \text{ Ft}$$

pénzünk lesz.

b) $B \cdot 1{,}25^4 = 144\,141, \qquad B \approx 59\,040$ Ft.

4. a) Azonos átalakításokkal $4^{\frac{4}{y}+2} = 4^{2+\frac{3y}{2y+4}}$. A 4 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\dfrac{4}{y} + 2 = 2 + \dfrac{3y}{2y+4}$, ahonnan $y_1 = 4$, $y_2 = -\dfrac{4}{3}$, és mindkettő megoldása az egyenletnek.

b) Mivel $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, azért

$$\cos 2x + \sin x - 2\sin^3 x = 0,$$
$$\cos 2x + (\sin x)\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 0,$$
$$(\cos 2x)(1 + \sin x) = 0,$$

$$\text{ahonnanvagy} \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi x_{1,\,k} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}; \text{vagy} \sin x = -1, x_{2,\,n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

5. A $P(2;5)$ ponton áthaladó egyenesek egyenlete $Ax + By - 2A - 5B = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ alakban írható. A feltétel szerint

$$\frac{|5A + 3B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \cdot \frac{|-A - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

ahonnan

$$|3A - 2B| = 2|3A + 5B|,$$

azaz

$$3A - 2B = 6A + 10B \quad \text{vagy} \quad -3A + 2B = 6A + 10B.$$

Egy megfelelő $(A;B)$ számpár így $(4;-1)$ vagy $(8;-9)$.

A keresett egyenesek egyenlete: $4x - y = 3$ vagy $8x - 9y = -29$. (A keresett egyenesek átmennek azon a C, illetve D ponton, amelyekre $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, illetve $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$, azaz a C pont az AB szakasz B-hez közelebb eső harmadolópontja $(C(1;1))$, a B pont az AD szakasz felezőpontja $(D(-7;-3))$.

6. Az első egyenletből $y = 3x$ és $x > 0$, $y > 0$. Így

$$x^{\log_3 3x} + 2 \cdot (3x)^{\log_3 x} = 27.$$

Azonos átalakításokkal

$$x^{1+\log_3 x} + 2 \cdot 3^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 x} = 27,$$

$$x \cdot x^{\log_3 x} + 2 \cdot x \cdot x^{\log_3 x} = 27,$$
$$x \cdot x^{\log_3 x} = 9.$$

A $\log_3 x$ szigorúan monoton függvény, alkalmazzuk az egyenlet mindkét oldalára:

$$\log_3 x + (\log_3 x)^2 = 2,$$

ahonnan $\log_3 x_1 = 1$, $x_1 = 3$, $y_1 = 9$ vagy $\log_3 x_2 = -2$, $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

7. Az $x \mapsto x^2 - 2 \cdot \frac{k+3}{k-2} x + \frac{4k}{k-2}$, $x \in \mathbf{R}$ másodfokú függvény egyik zérushelye 2-nél kisebb, a másik pedig 3-nál nagyobb pontosan akkor, ha ez a függvény $x = 2$-nél és $x = 3$-nál is negatív értéket vesz fel, azaz

$$4 - 2 \cdot \frac{k+3}{k-2} \cdot 2 + \frac{4k}{k-2} < 0 \quad \text{és} \quad 9 - 2 \cdot \frac{k+3}{k-2} \cdot 3 + \frac{4k}{k-2} < 0,$$

azaz

$$\frac{k-5}{k-2} < 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{7\left(k - \frac{36}{7}\right)}{k-2} < 0,$$

tehát $2 < k < 5$.

8. Készítsünk ábrát. A feltétel szerint $B'C'$ hossza megegyezik az AEF háromszög kerületével. Legyen $AP = x$, az ABC háromszög BC oldalához tartozó magasság m. Az ABC háromszög területe az oldalak ismeretében kiszámítható: $T = 84$. Így $14 \cdot m = 2 \cdot 84$, $m = 12$ egység. Az $AEF\triangle \sim ABC\triangle$, így $\frac{B'C'}{42} = \frac{x}{12}$, $B'C' = \frac{7}{2}x$.

A szóban forgó trapéz területe:

$$t(x) = \frac{\left(14 + \frac{7}{2}x\right)(12 - x)}{2}, \qquad \text{ahol } 0 < x < 12.$$
$$t(x) = \frac{7}{4}(4 + x)(12 - x) = \frac{7}{4}\left(-x^2 + 8x + 48\right) = \frac{7}{4}\left(64 - (x-4)^2\right).$$

$t(x)$ akkor a legnagyobb, ha $x - 4 = 0$, $x = 4$, így $AP = 4$, azaz P az A ponthoz tartozó magasság A-hoz közelebb eső harmadolópontja.

(Dolgozhatunk differenciálszámítással vagy a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséggel is:

$$t(x) = \frac{7}{4}(4 + x)(12 - x) \le \frac{7}{4}\left(\frac{(4+x) + (12-x)}{2}\right)^2 = 112.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $4 + x = 12 - x$, azaz ha $x = 4$.)

Rábai Imre