

1. Tekintsük az $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10$ kifejezéssel megadott függvényt, amelynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

- Igazolja, hogy $f(x) > 0$ minden valós x -re.
- Mely x helyen veszi fel $f(x)$ a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

2. Az ABC trapéz egyik párhuzamos oldala $AB = 4,4$ egység, a trapéz szárai $BC = DA = 1,7$ egység, a trapéz átlói egyenlők, $AC = BD = 3,9$ egység. Számítsa ki a trapéz területét.

3. Az $x^2 + px - q = 0$ és az $x^2 + qx - p = 0$ egyenleteknek egyik gyöke közös, a másik gyökük különböző.

- Igazolja, hogy a nem közös gyökök összege 1.
- Írjon fel p felhasználásával olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a szóban forgó különböző gyökök.

4. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 2x}}{\sin x + \cos x} = -1$$

egyenletet.

5. Oldja meg a pozitív egész számokból álló számpárok halmazán az

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

egyenletet.

6. Az ABC háromszögben (a szokott jelölések alkalmazásával) $\gamma = 36^\circ$ és $a^2 - b^2 = 2cr$, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. Számítsa ki a háromszög másik két szögét.

7. Tükrözze az $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 33 = 0$ egyenletű kört az $x - 2y = -2$ egyenletű egyenesre. Írja fel a szóban forgó két kör közös érintőinek egyenletét.

8. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x-a}{x-2} + \frac{10}{x+2} = \frac{44}{4-x^2}$$

egyenletet, ahol a valós paraméter.

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények az I. mérőlap (1995/8. sz.) feladataihoz

1. C ponton át a DA -val húzott párhuzamos az AB oldalt az E pontban metszi. $AE = 26$, $EB = 39 - 26 = 13$ egység. Az EBC háromszög derékszögű, hiszen $EC = 5$ egység és $EC^2 + CB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = EB^2$. A trapéz m magassága megegyezik az ECB háromszög EB átfogóhoz tartozó magasságával, így $13m = 5 \cdot 12$, $m = \frac{60}{13}$.

A trapéz területe: $T = \frac{26+39}{2} \cdot \frac{60}{13} = 150$ területegység.

A trapéz szögei: $67,38^\circ$, $22,62^\circ$, $157,38^\circ$ és $112,62^\circ$.

2. Legyen $BB_1 = s$ és $BB_1A \sphericalangle = \varphi$. Ekkor $AB_1 = B_1C = 2s$ és $BB_1C \sphericalangle = 180^\circ - \varphi$. Az AB_1B és a CB_1B háromszögekben az AB , illetve BC oldalra írjuk fel a koszinusztételt:

$$10 = s + 4s^2 - 2 \cdot s \cdot 2s \cdot \cos \varphi, \quad 30 = s^2 + 4s^2 + 2 \cdot s \cdot 2s \cdot \cos \varphi$$

ahonnan $40 = 10s^2$, $s = 2$ és így $\cos \varphi = \frac{5}{8}$. $AC = 4s = 8$ egység, és $T = s \cdot 2s \cdot \sin \varphi$. Mivel $\sin^2 \varphi = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$ és

$\sin \varphi > 0$, azért $\sin \varphi = \frac{\sqrt{39}}{8}$, tehát a háromszög területe

$$T = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39} \text{ területegység.}$$

3. a) A negyedik év végén

$$\begin{aligned} 20\,000 (1,25^4 + 1,25^3 + 1,25^2 + 1,25) &= 20\,000 \cdot 1,25 \cdot \frac{1,25^4 - 1}{1,25 - 1} = \\ &= 100\,000 \cdot (1,25^4 - 1) \approx 144\,141 \text{ Ft} \end{aligned}$$

pénzünk lesz.

b) $B \cdot 1,25^4 = 144\,141$, $B \approx 59\,040$ Ft.

4. a) Azonos átalakításokkal $4^{\frac{4}{y}+2} = 4^{2+\frac{3y}{2y+4}}$. A 4 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\frac{4}{y} + 2 = 2 + \frac{3y}{2y+4}$, ahonnan $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{4}{3}$, és mindkettő megoldása az egyenletnek.

b) Mivel $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, azért

$$\begin{aligned}\cos 2x + \sin x - 2\sin^3 x &= 0, \\ \cos 2x + (\sin x)(1 - 2\sin^2 x) &= 0, \\ (\cos 2x)(1 + \sin x) &= 0,\end{aligned}$$

ahonnanvagy $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_1, k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; vagy $\sin x = -1$, $x_2, n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. A $P(2; 5)$ ponton áthaladó egyenesek egyenlete $Ax + By - 2A - 5B = 0$ ($A^2 + B^2 > 0$) alakban írható. A feltétel szerint

$$\frac{|5A + 3B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \cdot \frac{|-A - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ahonnan

$$|3A - 2B| = 2|3A + 5B|,$$

azaz

$$3A - 2B = 6A + 10B \quad \text{vagy} \quad -3A + 2B = 6A + 10B.$$

Egy megfelelő $(A; B)$ számpár így $(4; -1)$ vagy $(8; -9)$.

A keresett egyenesek egyenlete: $4x - y = 3$ vagy $8x - 9y = -29$. (A keresett egyenesek átmennek azon a C , illetve D ponton, amelyekre $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, illetve $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$, azaz a C pont az AB szakasz B -hez közelebb eső harmadolópontja ($C(1; 1)$), a B pont az AD szakasz felezőpontja ($D(-7; -3)$).

6. Az első egyenletből $y = 3x$ és $x > 0$, $y > 0$. Így

$$x^{\log_3 3x} + 2 \cdot (3x)^{\log_3 x} = 27.$$

Azonos átalakításokkal

$$\begin{aligned}x^{1+\log_3 x} + 2 \cdot 3^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 x} &= 27, \\ x \cdot x^{\log_3 x} + 2 \cdot x \cdot x^{\log_3 x} &= 27, \\ x \cdot x^{\log_3 x} &= 9.\end{aligned}$$

A $\log_3 x$ szigorúan monoton függvény, alkalmazzuk az egyenlet mindkét oldalára:

$$\log_3 x + (\log_3 x)^2 = 2,$$

ahonnan $\log_3 x_1 = 1$, $x_1 = 3$, $y_1 = 9$ vagy $\log_3 x_2 = -2$, $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

7. Az $x \mapsto x^2 - 2 \cdot \frac{k+3}{k-2}x + \frac{4k}{k-2}$, $x \in \mathbf{R}$ másodfokú függvény egyik zérushelye 2-nél kisebb, a másik pedig 3-nál nagyobb pontosan akkor, ha ez a függvény $x = 2$ -nél és $x = 3$ -nál is negatív értéket vesz fel, azaz

$$4 - 2 \cdot \frac{k+3}{k-2} \cdot 2 + \frac{4k}{k-2} < 0 \quad \text{és} \quad 9 - 2 \cdot \frac{k+3}{k-2} \cdot 3 + \frac{4k}{k-2} < 0,$$

azaz

$$\frac{k-5}{k-2} < 0 \quad \text{és} \quad \frac{7(k-\frac{36}{7})}{k-2} < 0,$$

tehát $2 < k < 5$.

8. Készítsünk ábrát. A feltétel szerint $B'C'$ hossza megegyezik az AEF háromszög területével. Legyen $AP = x$, az ABC háromszög BC oldalához tartozó magasság m . Az ABC háromszög területe az oldalak ismeretében kiszámítható: $T = 84$. Így $14 \cdot m = 2 \cdot 84$, $m = 12$ egység. Az $AEF\Delta \sim ABC\Delta$, így $\frac{B'C'}{42} = \frac{x}{12}$, $B'C' = \frac{7}{2}x$.

A szóban forgó trapéz területe:

$$t(x) = \frac{(14 + \frac{7}{2}x)(12 - x)}{2}, \quad \text{ahol } 0 < x < 12.$$

$$t(x) = \frac{7}{4}(4+x)(12-x) = \frac{7}{4}(-x^2 + 8x + 48) = \frac{7}{4}(64 - (x-4)^2).$$

$t(x)$ akkor a legnagyobb, ha $x-4=0$, $x=4$, így $AP=4$, azaz P az A ponthoz tartozó magasság A -hoz közelebb eső harmadolópontja.

(Dolgozhatunk differenciálszámítással vagy a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséggel is:

$$t(x) = \frac{7}{4}(4+x)(12-x) \leq \frac{7}{4} \left(\frac{(4+x) + (12-x)}{2} \right)^2 = 112.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $4+x=12-x$, azaz ha $x=4$.)

Rábai Imre