Az elmúlt tanév Arany Dániel Matematika Verseny és az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematika feladatait és eredményeit az Országos Közoktatási és Szolgáltató Intézet kiadványából vettük át, amelyben a példák megoldásai is megtalálhatók. Ez segítséget nyújthat az e tanévi versenyekre való felkészülésben is!

A kiadvány megrendelhető: OKSZI, 1054 Budapest, Báthori u. 10.
Levélcím: 1399 Budapest, Pf. 701/432.

I. Kategória

(A szakközépiskolák tanulói)Első (iskolai) forduló

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x+y=1; x^5+y^5=31.$$

2. Határozza meg azokat az $(x;y)$ valós számpárokat, amelyek eleget tesznek a következő feltételek mindegyikének:
a)az x egész szám;
b) $x^2+y^2\le 90;$
c) $2x^2-xy+10=0.$

3. Adott egy konvex hatszög, amelynek csúcsai A, B, C, D, E, F. Legyen az ABC háromszög súlypontja B_1, a BCD háromszög súlypontja C_1, a CDE háromszög súlypontja D_1, a DEF háromszög súlypontja E_1, az EFA háromszög súlypontja F_1, az FAB háromszög súlypontja A_1.
Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ hatszög középpontosan szimmetrikus!

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$8^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]}=2^{7x-1}.$$

($[a]$ jelenti az a valós szám egészrészét.)

5. Igazolja, hogy ha négy egymás után következő 5-nél nagyobb egész szám egyike sem osztható 5-tel, akkor a szorzatuk utolsó három számjegye független a négy szám kiválasztásától.

6. Legyenek a, b és c egy háromszög oldalai és α, β, γ rendre a velük szemközti szögek. Bizonyítsuk be, hogy ha $3\alpha+2\beta=180^\circ$, akkor $a^2+bc-c^2=0$.

Második forduló

1. Legyen $x+\dfrac{1}{x}=3$. Igazolja, hogy ekkor $x^7+\dfrac{1}{x^7}$ egész szám!

2. Oldja meg a pozitív egész számok halmazán az

$$(x+y)z=xy(z-1)$$

egyenletet!

3. Az ABC háromszög BC oldalának belső pontja legyen D. A D ponton át húzzunk párhuzamost az AC és az AB oldalegyenessel. Az előbbi egyenes az AB oldalt E, az utóbbi egyenes az AC oldalt F pontban metszi. A CE és a BF egyenesek metszéspontját jelöljük G-vel. Igazolja, hogy az $AEGF$ négyszög területe egyenlő a BCG háromszög területével!

4. Oldja meg a pozitív számok halmazán az

$$x^{2\sin x-\cos 2x}<\frac{1}{x}$$

egyenlőtlenséget!

5. Jelöljük az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög oldalainak hosszát a-val, b-vel, c-vel, a magasságpontját M-mel, a súlypontját S-sel! Igazolja, hogy az MS egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos a BC oldallal, ha

$$(b^2-c^2)^2=a^2(2a^2-b^2-c^2).$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x - 11x^2 = 11y - 8y^2; (1) 6x + 12x^2 = y + 4y^2. (2)$$

2. Az ABC háromszög a, b, c hosszúságú oldalait az ábrán látható módon meghosszabbítottuk. Így a $KLMNPR$ hatszöget kaptuk. A hatszög területét T-vel, a háromszög területét t-vel jelölve, igazolja, hogy

$$T \geq 13t.$$

3. Egy O középpontú, r sugarú kör OA sugarának felezőpontja F. F-ben az OA sugárra merőleges félegyenest állítunk. Ez az adott kört K-ban metszi. Legyen $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, és E_1 és E_2 a kör két olyan (különböző) pontja, amelyekre $E_1FK\sphericalangle = KFE_2\sphericalangle = \alpha/2$.

Jelöljük P-vel az OA és az E_1E_2 egyenesek közös pontját. Bizonyítsa be, hogy minden α esetén ugyanazt a P pontot kapja.

Mit mondhat P-ről, ha $\alpha = 180^\circ$, illetve ha $180^\circ < \alpha < 360^\circ$?

II. Kategória
(Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók) Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z = \frac{5}{2}$$

egyenletet, ahol x, y, z nem negatív egész számok.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 - y^2.$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög B és C csúcsán átmenő kör az AB oldalt P-ben, az AC oldalt Q-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A csúcsot az APQ háromszög köré írt körének középpontjával összekötő egyenes merőleges BC-re.

4. Határozzuk meg az a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... sorozat a_{1995} elemét, ha $a_0 = a$ adott pozitív egész, és

$$a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_{n-1}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

5. Igazoljuk, hogy ha $n > 0$ egész szám, akkor az

$$S_n = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

összeg értéke nem egész szám!

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y tetszőleges valós számok, akkor az

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3$$

kifejezés értéke pozitív.

2. Legyen p olyan 3-nál nagyobb prímszám, amelynek n-edik hatványa húszjegyű (n pozitív egész). Bizonyítsuk be, hogy e húsz jegy között van három egyenlő.

3. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalát osszuk fel 7–7 egyenlő részre. Az AB és a CD oldalak A, illetve D csúcsától számított ugyanannyiadik osztópontjait összekötő szakaszok a négyszöget hét négyszögre vágják szét. Bizonyítsuk be, hogy a hét négyszög között van olyan, amelynek a területe az $ABCD$ területének a hetedével egyenlő.

4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{1994}+\left(\sqrt{10}+3\right)^{1995}$$

összeg tizedesvessző előtti számjegye (azaz az egyes helyiértékű számjegye) 1-gyel egyenlő. (A feladat megoldásához számítógép nem használható.)

Harmadik (döntő) forduló

1. Az $A_1A_2A_3A_4$ és $A_1B_2B_3B_4$ közös csúcsú, azonos körüljárású különböző négyzetek. Bizonyítsuk be, hogy az A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 egyenesek egy ponton mennek át.

Igaz-e a feladat következő általánosítása: ha $A_1A_2A_3\dots A_n$ és $A_1B_2B_3\dots B_n$ közös csúcsú, azonos körüljárású különböző szabályos n-szögek, akkor az A_2B_2, A_3B_3, $\dots$, A_n, B_n egyenesek egy ponton mennek át.

2. Jelölje egy tetszőleges konvex n-szög oldalait a_1, a_2, $\dots$, a_n; belső szögeit α_1, α_2, $\dots$, α_n, területét pedig t.

Mely n értékekre igaz bármely konvex n-szög esetén, hogy

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{t}\geq\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{1}{\sin\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\sin\alpha_n}?$$

3. Legyenes p és q pozitív prímszámok. Tudjuk, hogy

$$\sqrt{p^2+7pq+q^2}+\sqrt{p^2+14pq+q^2}$$

egész. Bizonyítsuk be, hogy $p=q$.

III. Kategória

(A gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói)Első (iskolai) forduló

1. Van-e olyan n, amelyre az 1-től $4n$-ig terjedő egész számok elhelyezhetők egy 4 sorból és n oszlopból álló téglalapba úgy, hogy az utolsó sorban minden elem a fölötte álló három elemnek az összege legyen?

2. Legyen két egymást metsző kör k_1 és k_2, az egyik közös pontjukat jelölje A. A két kör egyik közös érintője k_1-et P-ben, k_2-t Q-ban, a másik közös érintő k_1-et R-ben, k_2-t S-ben érinti. Bizonyítsuk be, hogy a PAQ és RAS háromszögek körülírt körei érintik egymást.

3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely legalább hatféleképpen előáll négy darab különböző (pozitív) osztójának az összegeként?

4. Mutassuk meg, hogy ha egy 10 egységszer 8 egységszer 6 egységnyi oldalú téglatestben akárhogyan helyezünk is el 9 darab (egymásba nem nyúló) egységkockát, akkor biztosan elhelyezhető a téglatestben még egy egységnyi sugarú gömb is (amelynek nincs közös belső pontja egyik kockával sem és minden pontja a téglatestbe esik).

5. Egy dobozban 5 vásárlási utalvány van, értékük 100, 200, 300, 400, illetve 500 forint. A dobozból legfeljebb százszor húzhatunk egy-egy utalványt úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott papírt. Bármelyik húzás után leállhatunk (azaz többször nem húzunk), és akkor megtarthatjuk az éppen nálunk levő utalványt. Milyen szabály szerint álljunk le, hogy a várható nyereményünk a lehető legnagyobb legyen, és mennyi ez a maximális várható nyeremény?

Második (döntő) forduló

1. A k kör belülről érinti az ABC háromszög körülírt körét az R pontban, továbbá érinti az AB oldalt P-ben, az AC oldalt pedig Q-ban. Az RP, ill. RQ egyenesek másik metszéspontja a körülírt körrel S, ill. T, a k kör középpontja U. Bizonyítsuk be, hogy az AU, BT, CS és PQ egyenesek egy ponton mennek át.

2. Legyen n rögzített pozitív egész szám. Adjuk meg az

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{9}{8}n^2$$

egyenletnek az összes olyan megoldását a valós számok körében, ahol minden i-re $1\le x_i\le 2$ teljesül.

3. Számítsuk ki $m=1995$ esetén az alábbi összeg értékét:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-2)^k\binom{2m-2k}{m-k}.$$

(A $\sum\limits_{k=0}^{m}$ jelölés azt jelenti, hogy a szóban forgó tagokat az összes $0\le k\le m$ értékre kell összegezni. $\binom{0}{0}$ értéke definíció szerint 1.)

Az 1994/95. évi matematika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória (A szakközépiskolák tanulói)

I. díj: **Németh Sándor Géza**, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szakközépiskola, felkészítő tanár: Benedek Ilona
II. díj: **Zaupper Bence**, III. o., Győr, Krúdy Gyula Gimnázium és Vendéglátóipari Szki., felkészítő tanár: Babarczi Imréné
III. díj: **Bányai Attila**, IV. o., Kaposvár, Eötvös Loránd Műszaki Középiskola, felkészítő tanár: Demeter László
4. **Kiss Béla**, II. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szakközépiskola, felkészítő tanár: Újvári István
5. **Kiss Olivér**, IV. o., Debrecen, Mechwart András Gépipari Műszaki Szki., felkészítő tanár: dr. Rutovszky Ede
6. **Stikkel Gábor**, III. o., Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimnázium, felkészítő tanár: Máté Mihályné
7. **Gál Marcell**, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn., felkészítő tanár: Csapó Judit
8. **Novák András**, IV. o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szakközépiskola, felkészítő tanár: Szenesné Durucz Anna
9. **Pálos Ferenc**, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn., felkészítő tanár: Csapó Judit
10. **Lovász Zoltán**, IV. o., Bonyhád, Perczel Mór Közgazdasági Szakközépiskola, felkészítő tanár: Lohl Árpád

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Szabó Ildikó*, IV. o., Miskolc, Fáy András Közgazdasági Szki.; **12.** *Kovács Krisztián*, IV. o., Békéscsaba, Kemény Gábor Műszaki Szki.; **13.** *Havasi László*, III. o., Szeged, Kőrösi J. Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki.; **14.** *Bartha Zoltán*, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **15.** *László Norbert*, IV. o., Pápa, Jókai Mór Közgazdasági Szki.; **16.** *Vízhányó Attila*, IV. o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki.; **17.** *Krausz Katalin*, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szki.; **18.** *Bognár Zsolt*, III. o., Kaposvár, Eötvös Loránd Műszaki Középiskola; **19.** *Barák Gábor*, III. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki.; **20.** *Nagy Béla*, IV. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki.; **21.** *Kardos Sándor Zsolt*, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **22.** *Csányi Zsolt*, IV. o., Kiskunfélegyháza, Közgazdasági Szki.; **23.** *Hényel Erika*, IV. o., Salgótarján, Táncsics Mihály Közgazdasági Szki.; **24.** *Bazsik András*, IV. o., Budapest, Vásárhelyi Pál Kereskedelmi Szki.; **25.** *Czuppon Krisztina*, IV. o., Zalaegerszeg, Csány László Közgazdasági Szki.; **26–28.** *Mihajlik György*, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szki.; *Fűzéri Csaba*, IV. o., Miskolc, Bláthy Ottó Villamosenergia-ipari Szki.; *Tajti Imre*, III. o., Egri Közgazdasági Szki.; **29.** *Börcsök Zsolt*, III. o., Szeged, Déri Miksa Ipari Szki.; **30.** *Bogos Zsuzsa*, IV. o., Szigetszentmiklós, Batthyány Kázmér Gimnázium és Közgazdasági Szki.

II. kategória (Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

I. díj: **Burcsi Péter**, III. o., Pápa, Türr István Gimnázium és Óvónői Szki., felkészítő tanár: Németh Zsolt
II. díj: **Gilyén Péter**, IV. o., Budapest, Piarista Gimnázium, felkészítő tanár: Varga László, Mazgon Gábor
III. díj: **Ehreth Imre**, IV. o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evengélikus Gimnázium, felkészítő tanár: Erdélyi János
4. **Nagy Lajos**, IV. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, felkészítő tanár: Szabadfalviné Kormányos Anikó

5. **Torma Péter**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, felkészítő tanár: Nagy Róbert, Zsebők Ottó, Tamás Imre

6. **Horváth István**, IV. o., Fonyód, Mátyás Király Gimnázium és Postaforgalmi Szki., felkészítő tanár: Bödör Márta

7. **Németh Tibor**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, felkészítő tanár: Nagy Róbert, Zsebők Ottó, Tamás Imre

8. **Szíjártó Gábor**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, felkészítő tanár: Tamás Imre

9. **Simonics Gábor**, IV. o., Sátoraljaújhely, Kossuth Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szki., felkészítő tanár: Dobó Józsefné

10. **Kovács Gábor**, IV. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Széplaki Györgyné

Miniszteri dicséretben részesült:
11. *Farkas Péter*, IV. o., Budapest, Szent István Gimnázium; **12.** *Izsák Ferenc*, IV. o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium; **13.** *Wágner Ferenc*, IV. o., Tata, Eötvös József Gimnázium; **14.** *Varga Dezső*, IV. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **15.** *Mikola István*, IV. o., Sárospataki Református Gimnázium; **16.** *Kardkovács Zsolt*, IV. o., Budapest, Károlyi Mihály Magyar–Spanyol Tannyelvű Gimnázium; **17.** *Császár Miklós*, IV. o., Szekszárd, Garay János Gimnázium; **18.** *Fekete Gergely*, IV. o., Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium; **19.** *Lestyán Zsolt*, III. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; **20.** *Holcsek Balázs*, III. o., Veszprém, Lovassy László Gimnázium; **21.** *Horváth Károly*, IV. o., Sárvár, Tinódi Sebestyén Gimnázium; **22.** *Heim László*, IV. o., Budapest, Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola Gimnázium; **23.** *Szabó Balázs Zsolt*, IV. o., Esztergom, Szent István Gimnázium és Híradástechnikai Szki.; **24.** *Lolbert Tamás*, III. o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium; **25.** *Sztranyák Attila*, III. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; **26.** *Szabó Balázs*, IV. o., Veszprém, Vetési Albert Gimnázium; **27.** *Benedik Marcell*, IV. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium; **28.** *Tarján Péter*, III. o., Budapest, Piarista Gimnázium; **29.** *Csorba István*, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium; **30–31.** *Oláh Judit*, IV. o., Jászberény, Lehel Vezér Gimnázium; *Tihon József*, III. o., Budapest, Szent István Gimnázium.

III. kategória
(A speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

I. díj: **Koblinger Egmont**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné

II. díj: **Szádeczky-Kardoss Szabolcs**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné

III. díj: **Bárász Mihály**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Surányi László, Beleznay Ferenc, Dobos Sándor

4. **Tóth Gábor Zsolt**, III. o., Budapest, Árpád Gimnázium, felkészítő tanár: Mikusi Imre, Vajda István

5. **Németh Zoltán**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné

6. **Valkó Benedek**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné

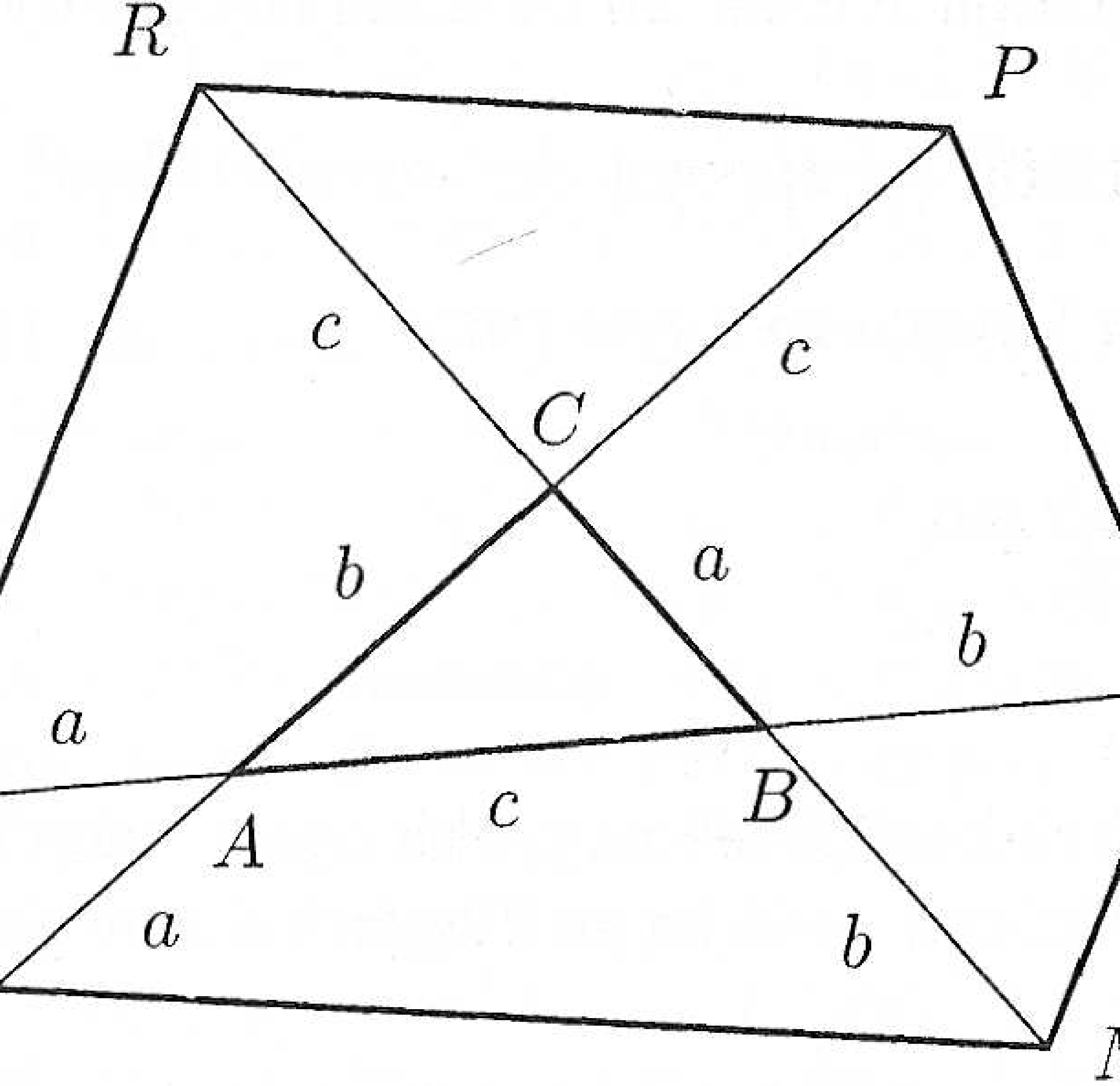
7. **Horváth Péter**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné

8. **Fey Dániel**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné

9. **Fenyvesi Anikó**, IV. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, felkészítő tanár: Mihályi Gyula, Láng Hugó

10. **Ruzsa Gábor**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Surányi László, Beleznay Ferenc, Dobos Sándor

Miniszteri dicséretben részesült:
11. *Elek Péter*, III. o., Budapest, Árpád Gimnázium; **12.** *Szobonya László*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **13.** *Kovács András*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **14.** *Tóth Péter*, III. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **15.** *Bárász Tamás*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **16.** *Orbán András*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **17.** *Király Csaba*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **18.** *Kiss Márton*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **19.** *Hegedüs Márton*, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; **20.** *Józsa Balázs Gábor*, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium.


R
P
c
c
C
b
a
b
a
c
B
A
a
b
N