Az elmúlt tanévi Arany Dániel Matematika Verseny és az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematika feladatait és eredményeit az Országos Közoktatási és Szolgáltató Intézet kiadványából vettük át, amelyben a példák megoldásai is megtalálhatók. Ez segítséget nyújthat az e tanévi versenyekre való felkészülésben is!

A kiadvány megrendelhető: OKSZI, 1054 Budapest, Báthori u. 10.
Levélcím: 1399 Budapest, Pf. 701/432.

KEZDŐKElső forduló

1. Igaz-e, hogy húsz egymást követő természetes szám szorzata mindig osztható 1995-tel? Állítását indokolja!

2. Egy függvény értelmezési tartománya a $[-3;5]$ intervallum, és $f(x) = [x]^2 - 1$, ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelenti. ($[x]$ jelenti az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb számot.)
a) Határozza meg a függvény értékkészletét!
b) Oldja meg az $f(x) = 3x - 3$ egyenletet a $[-3;5]$ intervallumon!

3. Az ABC háromszög C-nél levő szöge derékszög. Legyen P a háromszög olyan belső pontja, amely egyenlő távol van az AC és BC oldalaktól, és amelyre a BCP háromszög területe 3 cm^2, a CAP háromszög területe 4 cm^2, és az ABP háromszög területe 5 cm^2. Számítsa ki az ABC háromszög beírt körének sugarát!

4. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a C-nél levő szög tompaszög. A C pontban a BC oldalra állított merőleges az AB oldalt a D pontban metszi. Igazolja, hogy $2 \cdot DC^2 = BD^2 - AD \cdot DB$!

5. Igazolja, hogy ha az a, b és c valós számra teljesül az $a \geq 1$, $b \geq 1$ és $c > 0$ feltétel, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{(ab+c)^2 - c}{(b+c)^2 - c} \leq a^2.$$

Második forduló

A szakközépiskolai tanulók feladatai

1. Oldja meg a valós számok halmazán a $\left\{\frac{3x-1}{2}\right\} = \frac{x+1}{7}$ egyenletet! (Ahol $\{z\}$ a z szám törtrészét jelenti, azaz $\{z\} = z - k$, ahol k a legnagyobb olyan egész szám, amely z-nél nem nagyobb.)

2. Az ABC derékszögű háromszög beírt köre az AB átfogót a D pontban érinti. Bizonyítsa be, hogy $AD \cdot DB = t_{ABC}$!

3. Keresse meg azokat az x, y, z, v pozitív egész számokat, amelyekre $xy = z + v$ és $zv = x + y$ teljesül!

A nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók feladatai

1. Határozza meg azt a legnagyobb természetes számot, amellyel $n^7 - n^3$ minden n természetes szám esetén osztható!

2. Megegyezik a szakközépiskolások 3. feladatával. (Lásd ott.)

3. Bizonyítsa be, hogy ha a $PQRS$ négyszög csúcsai egy egységnyi oldalú négyzet különböző oldalain helyezkednek el, akkor a $PQRS$ négyszög kerülete legalább $2\sqrt{2}$!

A speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók feladatai

1. Igazolja, hogy ha az egymástól különböző x, y, z valós számokra

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0, \qquad \text{akkor} \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0 \qquad \text{is teljesül!}$$

2. Megegyezik az általános tantervű gimnáziumok tanulóinak 3. feladatával. (Lásd ott.)

3. A k és n pozitív egészekről azt tudjuk, hogy az $(n+2)^{n+2}$, $(n+4)^{n+4}$, $(n+6)^{n+6}$, $\ldots$, $(n+2k)^{n+2k}$ számok mind ugyanarra a számjegyre végződnek a tízes számrendszerben. Legfeljebb mekkora lehet a k?

HALADÓKElső forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 2$ egész szám, akkor a $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots + (2n)^2$ összeg értéke nem lehet prímszám.

2. Rajzoljunk egységnyi oldalú szabályos háromszög oldalai, mint átmérők fölé köröket. Számítsuk ki e körök közös részének területét!

3. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} - \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} + \sqrt{\frac{p+x}{p-x}}}$$

függvény értelmezhető (p pozitítv valós paraméter). Határozzuk meg a függvény értékkészletét!

4. Az ABC háromszögben $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$. Igazoljuk, hogy az A csúcshoz tartozó súlyvonal harmadolja az α szöget!

5. Bizonyítsuk be, hogy bármely valós a és b értékre

$$(a+b)^4 \geq 7a^3b + 7ab^3 + 2a^2b^2.$$

6. Adott az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög. Melyek azok a P pontok a háromszög belsejében, amelyekre igaz, hogy a P pontból a háromszög oldalaira állított merőleges szakaszokból háromszög szerkeszthető?

Második forduló

A szakközépiskolai tanulók feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerbeli $\overline{aaabbb}$ és $\overline{ababab}$ alakú számok nem lehetnek négyzetszámok (ahol a és b számjegyeket jelentenek).

2. Egy tetszőleges derékszögű háromszögbe két olyan négyzetet írunk, amelyeknek csúcsai a háromszög kerületén vannak rajta. Ha a-val jelöljük annak a négyzetnek az oldalát, amelyiknek egyik oldala az átfogóra illeszkedik, b-vel pedig a másik négyzet oldalát, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$1 < \frac{b}{a} < 1{,}5.$$

3. Az ABC háromszög C csúcsán átmenő e egyenes harmadolja a háromszög területét, a B csúcson átmenő f egyenes pedig felezi a háromszög területét. Milyen arányban osztja ketté a háromszög területét az A csúcson, valamint az e és f egyenesek metszéspontján átmenő egyenes?

4. A $72\ \mathrm{cm}^2$ felszínű négyzet alapú egyenes gúlák közül melyiknek a legnagyobb a térfogata? Mennyi ez a maximális térfogat?

A nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók feladatai

1. Azonos a szakközépiskolások 1. feladatával. (Lásd ott.)

2. Azonos a szakközépiskolások 2. feladatával. (Lásd ott.)

3. Oldjuk meg az egész számok körében az $x^3 + y^3 = x^2y^2$ egyenletet.

4. Egy háromszög beírt köre a háromszög egyik súlyvonalát három olyan szakaszra osztja, amelyekre igaz, hogy a körön kívüli szakaszok hossza egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a háromszög egyik oldala egy másik oldal kétszerese!

A speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók feladatai

1. Három házaspár vacsorán vesz részt. Mindenki más-más időpontban érkezik a vacsora színhelyére. Minden újonnan érkező ember érkezéskor kezet fog a már ott tartózkodókkal, kivéve a saját házastársával. Miután mindenki leült vacsorázni, az egyik ember megkérdezte az összes többitől, hogy hány emberrel fogott kezet érkezéskor.

Hányadikként érkezhetett a kérdező, ha kérdésére öt különböző választ kapott?

2. Adott egy olyan ABC háromszög, amelynek BC a legrövidebb oldala. Legyen P az AB oldal azon pontja, amelyre $PCB\sphericalangle = BAC\sphericalangle$, valamint Q az AC oldal azon pontja, amelyre $QBC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$.

Bizonyítsuk be, hogy az ABC és APQ háromszögek körülírt köreinek középpontjait összekötő egyenese merőleges a BC egyenesre.

3. Azonos a nem speciális tantervű gimnáziumok tanulói 4. feladatával. (Lásd ott.)

4. Néhány prímszám szorzata tízszerese az összegüknek. Melyek ezek a (nem feltétlenül különböző) prímszámok?

Harmadik (döntő) forduló

A szakközépiskolai tanulók feladatai

1. Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontjának az alappal szemközti csúcsától mért távolsága az alap $\frac{3}{4}$ része. Mekkora az alap és a szár hosszának aránya?

2. Keressük meg mindazon p pozitív prímszámokat, amelyekre $2p-1$, $3p-2$, $5p-4$, $6p-5$, $9p-2$ és $12p+5$ számok mindegyike prím!

3. Bergengócia új, 13 szintes szállodájában a lift az emeleteket olyan sorrendben keresi fel, amilyen sorrendben benne a gombokat megnyomták. Egy csintalan kölyök – előre kitervelten – felment az egyik emeletre, és ott az összes állomás gombját benyomta (mindegyiket egyszer), méghozzá úgy, hogy a lift a lehető legtöbb ideig az ő programja szerint működjék.

Hány emeletnyi utat fog ezalatt a lift összesen megtenni?

(Annak az emeletnek a gombjára, amelyen éppen áll, a lift érzéketlen.)

A nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók feladatai

1. Az a, b, c oldalú háromszög oldalaihoz tartozó súlyvonalszakaszok rendre p, q, r hosszúak. Bizonyítsa be, hogy ha

$$p^2+q^2=r^2, \qquad \text{akkor} \qquad \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2.$$

2. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1995}$ valós számokról tudjuk, hogy $a_1>0$ és $a_{1995}>0$, továbbá bármely $1<i<1995$ esetén

$$\frac{3a_{i-1}+4a_{i+1}}{7}\le a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor mind az 1995 darab a_k szám ($1\le k\le 1995$) pozitív.

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$S_n=\left[\frac{n+2^0}{2^1}\right]+\left[\frac{n+2^1}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^{n-1}}{2^n}\right]$$

összeg, (ahol $[x]$ az x szám egészrészét, azaz a nála nem nagyobb egészek legnagyobbikát jelenti) minden pozitív egész n esetén n-nel egyenlő.

A speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók feladatai

1. Rendeljünk egy négyzet csúcsaihoz tetszőlegesen választott természetes számokat! Bármelyik csúcshoz írt szám elhagyható, ha az elhagyandó szám helyére beírjuk bármely két másik csúcshoz rendelt szám szorzatának egy adott p prímszámra vonatkozó osztási maradékát. (A két szám – a három közül – szabadon választható meg.)

Bizonyítsuk be, hogy a leírt változtatási szabály véges sokszori alkalmazásával bármely p pozitív prímszám esetén, tetszőlegesen megadott számnégyesből kiindulva elérhető, hogy a négy csúcshoz azonos szám tartozzon.

2. Azonos a nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók 3. feladatával. (Lásd ott.)

3. Adott egy négyzetekből álló véges halmaz. A halmaz minden elemének oldalhossza kisebb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy ha a halmaz elemeinek összterülete legalább 4, akkor el lehet őket úgy rendezni, hogy lefedjenek egy egységnégyzetet.

1994/95. évi Arany Dániel Matematika Verseny eredményei

KEZDŐKI. kategória: Szakközépiskolai tanulók

I. díj: Vinciczky Norbert, Nyíregyháza, Széchenyi I. Közgazdasági Szki., tanárai: Kissné Orosz Gyöngyvér, Kiss Sándor

II. díj: Ivánfi Zoltán, Budapest, Neumann J. Számítástechnikai Szki., tanára: Thomas Miklós

III. díj: Markó Csaba, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árokszállási Eszter

Ritecz Dániel, Kaposvár, Noszlopy G. Közgazdasági Szki., tanára: Varga Ferenc

I. dicséret: *Pintér Zoltán*, Ceglédi Közgazdasági Szki., tanára: Imre Sándor; *Sipos Péter*, Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki., tanára: Dunajszki Zsuzsa; *Szerencsi Péter*, Egri Közgazdasági Szki., tanárai: Kovács Andrea, Veres Nándor.

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Gergely Péter, Budapest, Kölcsey F. Gimnázium, tanára: Bátorfi Józsefné

Kun Gábor, Budapesti Piarista Gimnázium, tanárai: Albekt András, Wettstein József

Pap Júlia, Debrecen, Fazekas M. Gimnázium (8. oszt.), tanára: Nagy Erzsébet

Patakfalvy Zsolt, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium (8. oszt.), tanára: Dobos Sándor

II. díj: Hartman Miklós, Bonyhád, Petőfi S. Evengélikus Gimnázium, tanára: Katz Sándor

Rácz Balázs, Budapest, Veres Péter Gimnázium, tanára: Varga Mária

III. díj: Gál Tamás, Zalaegerszeg, Ságvári E. Gimnázium, tanára: Forgács Ferencné

I. dicséret: *Brencsics Iván*, Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimnázium, tanára: Némethné Varga Éva; *Deli Tamás*, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimnázium, tanárai: Csatóné Király Margit, Deli Lajos; *Farkas Claudia*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Lászlóné Sergyán Stefánia, Magyar Zsolt; *Hesz Gábor*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium (8. oszt.), tanára: Orosz Gyula; *Kispál István*, Dunaújváros, Széchenyi I. Gimnázium, tanára: Székelyi Sándorné.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Tóth Ádám, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor, Thiry Imréné, Montágh Balázs

II. díj: Csanda Gergely, Budapest, Szent István Gimnázium, tanára: Paróczay József

Kőműves Balázs, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Fazakas Tünde, Dobos Sándor

Nyul Gábor, Debrecen, Fazekas M. Gimnázium, tanára: Nagy Erzsébet

III. díj: Kőhalmi Dóra, Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimnázium, tanárai: Vajda István, Orbán Edit

Varga Gusztáv, Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimnázium,
tanárai: Vincze István, Kosztolányi József

I. dicséret: *Dargó Eszter*, Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimnázium, tanárai: Vincze István, Kosztolányi József; *Csíkvári András*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Fazakas Tünde, Thiry Imréné; *Lippner Gábor*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor, Thiry Imréné; *Pogány Ádám*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor, Thiry Imréné; *Szeles Tamás*, Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimnázium, tanárai: Kosztolányi József, Vincze István.

HALADÓKI. kategória: Szakközépiskolai tanulók

I. díj: Csonka Margit, Békéscsaba, Széchenyi I. Közg. és Külker. Szki.,
tanára: Szurovecz Béla

II. díj: Ács Gábor, Eger, Neumann J. Közgazdasági Szki.,
tanára: Szakaliné Haraszti Éva

Szikraszer József, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola,
tanára: Benedek Ilona

III. díj: Krizsán Norbert, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola,
tanára: Benedek Ilona

I. dicséret: *Szűcs Attila*, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Zsók Csilla;

II. dicséret: *Richter János*, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola, tanára: Benedek Ilona; *Szenti Csilla*, Budapest, Teleki Blanka Közgazdasági Szki., tanára: Gergely Péter.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Pintér Dömötör, Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, tanára: Asbóth József

II. díj: Lanczerdorfer Attila, Budapest, Szent István Gimnázium,
tanára: Lászlóné Sergyán Stefánia

III. díj: Kiss Gergely, Budapest, Szent István Gimnázium,
tanára: Lászlóné Sergyán Stefánia

I. dicséret: *Muth Lóránt*, Szekszárd, Garay J. Gimnázium, tanára: Pesti Gyula; *Négyesi Gábor*, Eger, Szilágyi E. Gimnázium, tanára: Burom Mária; *Fazekas Borbála*, Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnázium, tanára: Krakk Ferenc; *Czirok Levente*, Szekszárd, Garay J. Gimnázium, tanára: Lertes Lázár; *Fazekas Dóra*, Budapest, Karinthy Frigyes Gimnázium, tanára: Bella Zsolt.

II. dicséret: *Kacsuk Zsófia*, Budaörs, Illyés Gy. Gimnázium, tanára: Inges János; *Puskás Péter*, Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, tanárai: Heigl István, Peresztegi László; *Németi Dávid*, Budapest, Városmajori Gimnázium, tanára: Kovács Károlyné; *Szita István*, Körmend, Kölcsey F. Gimnázium, tanára: Soós Istvánné; *Székely Nóra*, Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimnázium, tanára: Hegyi Györgyné, Rácz János; *Sasvári Valéria*, Budapest, Vörösmarty Gimnázium, tanára: Károly Ildikó; *Tóth Lóránt*, Miskolc, Herman O. Gimnázium, tanára: Szabó Kálmán; *Miklós Balázs*, Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimnázium, tanára: Kovács István; *Madarász József*, Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimnázium, tanára: Katz Sándor; *Jáger Márta*, Budapest, Veres Pálné Gimnázium, tanára: Solti Judit.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: Frenkel Péter, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium,
tanára: Laczkó László

II. díj: Braun Gábor, Budapest, Szent István Gimnázium, tanára: Halek Tamás

Visontai Mirkó, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium,
tanára: Laczkó László

III. díj: Pap Gyula, Debrecen, Fazekas M. Gimnázium,
tanárai: Balázsi Tivadar, Kántor Sándor

Kiss László, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium,
tanára: Laczkó László

I. dicséret: *Berki Csaba*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Ponácz Ferenc, Horváth Gábor; *Nyakas Péter*, Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimnázium, tanárai: Vadvári Tibor, Horváth Attila; *Mátrai Tamás*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László; *Bíró Balázs*, Budapest, Árpád Gimnázium, tanárai: Besnyőné Titter Beáta, Vajda István; *Koncz Imre*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László; *Pécsi Bertalan*, Budapest, Berzsenyi D. Gimnázium, tanárai: Hubert Györgyné, Hutasi Katalin.

II. dicséret: *Visky Máté*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Lászlóné Sergyán Stefánia, Rácz János; *Bognár Gábor*, Budapest, Árpád Gimnázium, tanárai: Besnyőné Titter Beáta, Vajda István; *Gáspár László*, Miskolc, Földes F. Gimnázium, tanárai: Gulyás Tibor, Szabó Kálmán; *Nagy Attila*, Debrecen, Fazekas M. Gimnázium, tanára: Balázs Tivadar; *Salamon Gábor*, Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László; *Besenyei Péter*, Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimnázium, tanárai: Harcsár Zoltán, Mike János; *Papp Dániel*, Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimnázium, tanárai: Harcsár Zoltán, Mike János; *Erdélyi Tibor*, Budapest, Berzsenyi D. Gimnázium, tanárai: Hubert Györgyné, Somogyi László; *Vőneki Csaba*, Kecskemét, Bolyai J. Gimnázium, tanárai: Varga József, Kutas Tibor; *Juhász Zsófia*, Veszprém, Lovassy L. Gimnázium, tanárai: Békefi Zsuzsa, Varga Vince; *Sallai Zoltán*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanára: Halek Tamás; *Zakariás Ildikó*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Ponácz Ferenc, Horváth Gábor.