Szeptemberben „egymás kezét fogták” a királyok, hosszú kört alkotva.[1] Egy ilyen láncnál szükséges feltétel, hogy semelyik 2×2-es négyzetben se legyen 2-nél több király, hiszen ha lenne 3 király egy 2×2-es négyzetben, akkor azok páronként szomszédosak lennének, egy háromszöget képeznének, ami nem lehetne egy hosszabb kör része.

Vajon legfeljebb hány figura tehető fel egy sakktábla mezőire, ha mindegyik 2×2-es négyzetbe pontosan 2 figura kerülhet? Az erre a kérdésre adott válasz felső korlátja a „királyi kör” hosszának. A 8×8-as sakktáblán ilyen felső korlát a 32, hiszen felbontható 16 páronként diszjunkt 2×2-es négyzetre. Másrészt a sakktábla szokásos pepita színezését használva pl. a világos mezőkre egy-egy figurát feltehetünk, tehát a 32-es határ éles. Természetesen nem következik mindebből, hogy léteznie kellene 32 hosszú „királyi körnek”, sőt tudjuk, hogy nincs is ilyen.*

Érdekes azonban a fenti kérdés általánosabb formája.

1.Legfeljebb hány figura helyezhető el egy $n \times n$-es sakktáblára, ha bármelyik $k \times k$-as négyzetben ($k < n$) pontosan i figurának kell állnia?

Nyilván az $n = 8$, $k = i = 2$ esethez hasonlóan egyszerű a kérdés, ha $k \mid n$, azaz $n = ak$ alakú. Az biztos, hogy $\left(\frac{n}{k}\right)^2 i = a^2 i$-nél többet nem lehet feltenni.

De vajon elhelyezhető-e ennyi? Az $n \times n$-es sakktáblán $(n-k+1)^2$ számú $k \times k$-s négyzet van. Ezek mindegyikébe pontosan i figurát kellene elhelyeznünk. Próbáljuk meg kis n-re, k-ra a bábukat ügyesen letenni! Először nehéznek tűnik a konstrukció. De ha a szőnyeg vagy a tapéta periodikusan ismétlődő mintáira gondolunk, hamar rájöhetünk, elég pl. a bal felső sarokban lévő $k \times k$-s négyzetbe i figurát tetszőlegesen elhelyezni, majd ezt k-asával jobbra is, lefelé is ismételni. Ezzel az $n = ak$ esetet elintéztük.

Tegyük fel, hogy $n = ak + b$, ahol $1 \le b < k$. Világos, hogy minden $ak \times ak$-s négyzetben $a^2 i$ figurának kell állnia, így pl. a jobb alsó $ak \times ak$-s négyzetben is. Azt kell elérnünk, hogy az ebből kimaradó részen (a peremen) a lehető legtöbb figura legyen. Ezért először is a bal felső $b \times b$-s négyzetbe annyi figurát helyezünk, amennyit csak lehet (legfeljebb i-t). Ha $i > b^2$, akkor további figurákat helyezhetünk el a perem és a bal felső $k \times k$-s négyzet közös részébe – természetesen a már betöltött $b \times b$-s részen kívül (*1. ábra*). Ebbe a két $b \times (k-b)$-s téglalapba helyezzük a figurákat, amíg fér. A maradék (ha van) jut a $k \times k$-s négyzet $(k-b) \times (k-b)$-s részébe. Az így konstruált bal felső $k \times k$-s négyzetbeli kitöltés-mintát periodikusan ismételve egy maximális sok bábot tartalmazó $n \times n$-es négyzetet kapunk. (Gondoljuk meg, miért lesz ekkor minden $k \times k$-s négyzetben pontosan i darab figura!)

A maximum értéke:

$(a+1)^2 \cdot i$,ha $i \le b^2 a^2 \cdot i + (2a+1) \cdot b^2 + a(i-b)^2 = (a+1) \cdot \left(a \cdot i + b^2\right)$,ha $b^2 < i \le k^2 - (k-b)^2$és$a^2 \cdot i + (2n-b) \cdot b$,ha $i > k^2 - (k-b)^2$.

Több irányban lehet tovább vizsgálódni. Ha megengedjük, hogy a sakktábla téglalap alakú legyen, akkor a fentihez teljesen hasonló meggondolás adja a következő eredményt: Ha a téglalap $n \times m$-es, $n = a \cdot k + b$ $(1 \le b < k)$, $m = c \cdot k + d$ $(1 \le d < k)$, $n \ge m$, akkor a maximum értéke

$(a+1) \cdot (c+1) \cdot i$,ha $i \le b \cdot d a \cdot (c+1) \cdot i + (c+1) \cdot b \cdot d$,ha $b \cdot d < i \le k \cdot d$,

(mert a figurákat téglalap esetén inkább a hosszabb oldal melletti „peremre” érdemes helyezni).

$a \cdot c \cdot i + n \cdot d + c \cdot (i - d(k-b))$,ha $k \cdot d < i \le k(b+d) - b \cdot d$és$a \cdot c \cdot i + n \cdot d + m \cdot b - bd$,ha $i > k(b+d) - bd$.

Felvethető a minimum keresésének kérdése. Az erre adható válasz azonban következik a fentiekből, hiszen minden i-hez tartozó maximális jó figuraelhelyezés „komplementere” egy $(k^2 - i)$-hez tartozó minimális minta.

Csavarjuk most fel a téglalapot egy hengerre! Így csak alul és fölül lesz „pereme”. Egyáltalán lehetséges-e úgy figurákat felhelyezni a hengerre, hogy minden $k \times k$-s négyzetben ugyanannyi báb legyen? Ha igen, legfeljebb mennyit?

Ha pl. a henger legfelső részén egy $k \times k$-s négyzetet egyesével körbeléptetünk, akkor észrevehetjük, hogy a $k \times 1$-es oszlopokban lévő figurák száma k periódusonként ismétlődik. Amikor az „utolsó” oszlophoz érünk, a felcsavarás miatt az elsővel folytatjuk. Ha $p = (n;k) = (b;k)$ az n és k legnagyobb közös osztója, akkor az oszlopokban álló figurák számának sorozata p szerint periodikus kell legyen. Ebből azonnal következik egy szükséges feltétel i-re: $\frac{k}{p} \mid i$.

A hengeren, ha egy $k \times p$-s téglalapban tetszőlegesen $\frac{i \cdot p}{k}$ figurát helyezünk el, majd ezt ismételjük mindkét irányban, akkor a „szőnyegminta” a hengeren záródik. A szükséges $k \mid i \cdot p$ feltétel tehát elégséges is.

A maximum értéke:

$n \cdot (c+1) \cdot \frac{i}{k}$,ha $i \le d \cdot k$,$n \cdot d + n \cdot c \cdot \frac{i}{k}$,ha $i > d \cdot k$,

ismét optimálisan kihasználva a henger alsó (vagy felső) peremét.

Hogyan kaphatnánk egy perem nélküli esetet, amikor minden mező „egyenrangú”? Hajtsuk össze a sakktáblánkat tórusszá! (Mintha mentőövet alakítanánk ki egy $n \times m$-es téglalapból.)

Gondolkozzunk el a további problémákon:

[1]ld. a Királyok körei c. cikket az 1995/6. sz. 338. oldalán.

2.Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egyáltalán létezzen egy „egyenletes” figuraelhelyezés a toroidális sakktáblán?

3.A tórusznak nincs pereme. Vajon igaz-e, hogy minden olyan elrendezés, amelynél bármely $k \times k$-s négyzetbe i darab bábu kerül, ugyanannyi figurát használ fel?

Eddig arra törekedtünk, hogy „lokálisan kiegyensúlyozott” bábufelrakásnál elérjük a figurák számának maximumát. Engedjünk a feltételből, illetve módosítsuk azt.

4.Adott n, m és k. Legyen $1 \le i < j \le k^2$. Mennyi a táblára helyezhető figurák számának maximuma, ha minden $k \times k$-s négyzetbe legalább i és legfeljebb j bábut tehetünk?

5.Adott n, m és k-ra milyen $(i; j)$ számpárra létezik olyan bábufelállítás, amikor mindegyik $k \times k$-s négyzetben vagy pontosan i, vagy pontosan j darab figura van, és létezik legalább egy olyan $k \times k$-s négyzet, amiben i darab van, és olyan is, amiben j darab van.

6.Vajon mikor létezhet az $n \times m$-es sakktáblán olyan elrendezés, hogy minden $k \times k$-s négyzetben más-más számú figura legyen?

7.Létezik-e olyan alkalmas n, m és k, hogy az $n \times m$-es téglalap $k \times k$-s négyzeteiben éppen rendre

a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 1995$

b) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ l$

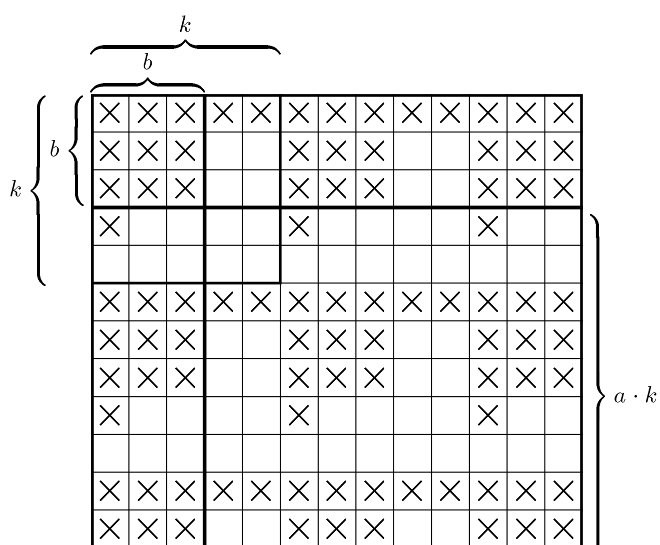
bábu álljon? (*2. ábra*)

(A 2. ábra az $n = m = 8$, $k = 6$, $l = 9$ esetre mutat két megoldást; a baloldali a minimális 9, a jobb pedig 13 bábuval. Mennyi a maximum ebben az esetben?)

⋆

A cikkhez a hozzászólásokat, a feladatok megoldásait (nemcsak a versenyzőktől) a szerkesztőség címén várja a szerző. A borítékra írják rá: „Figurák a sakktáblán”.

Blázsik Zoltán



$n = 13$, $k = 5$, $i = 12$, ($a = 2$, $b = 3$)
a maximum: 99 bábu