[1]A Bolyai János Matematikai Társulat Ifjúsági Matematikai Körében 1995. február 17-én elhangzott előadás.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1935. február 15-i számában egy kis cikk jelent meg; ez elsőnek közölt egy azóta sokat emlegetett geometriai tételt, amelyet *Erdős–Mordell tételnek* (vagy *egyenlőtlenségnek*) szokás nevezni. A tétel maga Erdős Páltól származik, a közölt megoldás pedig L. J. Mordelltől. Erdős egyenlőtlenségét feladatként tűzte ki a nagyon népszerű amerikai folyóiratban, az *American Mathematical Monthly*ban (a feladat itt valamivel később jelent meg, mint nálunk), megoldásait azonban csak 1937-ben közölték; ezek egyike Mordell lapunkban közölt megoldásával azonos.

E tétel bizonyításaival, alkalmazásaival, általánosításaival mindmáig sokan foglalkoztak; a vele kapcsolatos irodalom már köteteket töltene meg. Bebizonyosodott ugyanis, hogy ez az egyenlőtlenség valami módon kapcsolatban van a háromszöggeometria legtöbb nevezetes egyenlőtlenségével; számos általánosítási lehetőséget rejt magában, amik szinte vég nélkül folytathatók.

Előadásunk keretében az alkalmazásokon túl éppen azt szeretnénk megmutatni, hogy milyen gondolatokat ébresztett ez a tétel, és milyen irányú általánosításai születtek. Természetesen nem törekszünk arra, hogy minden, e témában felmerült és kutatott területet bemutassunk, csupán néhány jellegzetes, elemi eszközökkel is megközelíthető problémakörre hívjuk fel a figyelmet.

I. A tétel a következő: *Legyen P az $A_1A_2A_3$ háromszög belső pontja; legyen továbbá P távolsága a csúcsoktól rendre R_1, R_2, R_3, az A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 oldalegyenesektől pedig rendre r_1, r_2, r_3. Ezek között fennáll az*

$$R_1+R_2+R_3\ge 2(r_1+r_2+r_3) \tag{1}$$

egyenlőtlenség. Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $A_1A_2A_3$ szabályos háromszög és P a középpontja (1. ábra).

Vagy röviden: a háromszög egy belső pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege legalább kétszerese az oldalegyenesektől mért távolságösszegének.

A tétel különböző bizonyításai megtalálhatók az irodalomjegyzékben megadott könyvekben, ahol csak a magyar nyelven hozzáférhetőket soroltuk fel; e bizonyítások közül mutatunk be egyet.

Először egy segédtételt igazolunk: ha a háromszögben $A_2A_3=a$, $A_3A_1=b$, $A_1A_2=c$, akkor

$$aR_1\ge br_3+cr_2,\quad bR_2\ge cr_1+ar_3,\quad cR_3\ge ar_2+br_1. \tag{2}$$

Elegendő ezek közül pl. az elsőnek a bizonyítása, a többié teljesen hasonló módon történhet. Legyen A_2, ill. A_3 tükörképe az A_1-ből induló szögfelezőre A_2', ill. A_3' (*2. ábra*); az $A_1A_2'A_3'$ háromszög oldalai így $A_1A_2'=c$, $A_2'A_3'=a$, $A_3'A_1=b$; legyen ennek A_1-hez tartozó magassága m és a P-ből $A_2'A_3'$-re emelt merőleges r_1'. Ha P az $A_2'A_3'$ egyenesen van, akkor $r_1'=0$, ha viszont az $A_1A_2'A_3'$ háromszögön kívül van, r_1'-t negatív előjellel vesszük.

$$m\le R_1+r_1', \tag{3}$$

hiszen m az A_1 távolsága az $A_2'A_3'$ egyenestől; (3) nyilván teljesül akkor is, ha $r_1'\le 0$. Szorozzuk meg (3) mindkét oldalát a-val:

$$am\le aR_1+ar_1', \tag{4}$$

itt am az $A_1A_2'A_3'$ kétszeres területével egyenlő. Ugyanezt kapjuk az $A_2'PA_3'$, $A_3'PA_1$ és A_1PA_2' háromszögek kétszeres (előjeles) területeinek az összegezésével:

$$am=ar_1'+br_3+cr_2.$$

Helyettesítsük ezt (4) bal oldalába:

$$ar_1'+br_3+cr_2\le aR_1+ar_1',$$

mindkét oldalból ar_1'-t kivonva a bizonyítandót kapjuk, amit a segédtételben szereplő egyenlőtlenségekkel együtt átalakítva írunk fel:

$$R_1\ge\frac{b}{a}r_3+\frac{c}{a}r_2,\quad R_2\ge\frac{c}{b}r_1+\frac{a}{b}r_3,\quad R_3\ge\frac{a}{c}r_2+\frac{b}{c}r_1.$$

Ezeket összegezve kapjuk:

$$R_1+R_2+R_3\ge\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)r_1+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)r_2+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)r_3. \tag{5}$$

Mivel pl.

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\ge 2, \tag{6}$$

ezért (5)-ből közvetlenül következik a bizonyítandó (1).

1*

Egyenlőség (1)-ben akkor és csakis akkor állhat, ha ez a (6) és (3) típusú egyenlőtlenségekre is teljesül, azaz $a = b = c$ (a háromszög szabályos) és P rajta van minden magasságvonalon, azaz a háromszög középpontja.

A tételre adott bizonyítások nagy része bizonyos mértékig „finomítja" a tétel állítását, ez azt jelenti, hogy (1) két oldala közé olyan mennyiséget iktat be, ami (1) bal oldalát jobban közelíti, mint $2(r_1+r_2+r_3)$ és jobb oldalát jobban közelíti, mint $R_1+R_2+R_3$. Ebből a szempontból előbbi bizonyításunk is tartalmaz finomítást, hiszen az (5) jobb oldalán álló kifejezés (1) két oldala közé iktatódott be.

Vagy:

$$R_1+R_2+R_3 \geq 2(w_1+w_2+w_3) \geq 2(r_1+r_2+r_3),$$

ahol w_1,w_2, w_3 rendre az A_2PA_3, A_3PA_1, A_1PA_2 háromszögek P-ből induló szögfelezőinek hossza. A bal oldali egyenlőtlenségből nyilván következik a jobb oldali, hiszen $w_i \geq r_i$ $(i=1,2,3)$ (Ennek bizonyítása pl. [4]-ben.)

II. Nézzük most (1) néhány következményét. Érdekes eseteket kapunk, ha P a háromszög valamelyik nevezetes pontjával esik egybe.

1. Legyen P a hegyesszögű háromszög *köré írt körének a középpontja.* Ebben az esetben $R_1 = R_2 = R_3 = R$ (a köré írt kör sugara); $r_1 = R\cos\alpha$, $r_2 = R\cos\beta$, $r_3 = R\cos\gamma$. Ezekre alkalmazva (1)-et kapjuk, hogy

$$3R \geq 2R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),$$

amiből a nevezetes *koszinusz-egyenlőtlenség* adódik (hegyesszögű háromszögre):

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Ha viszont a jól ismert

$$r_1+r_2+r_3 = r+R$$

összefüggést (l. pl. [4]-et) helyettesítjük (1)-be (r a beírt kör sugara), a

$$3R \geq 2r+2R, \quad R \geq 2r$$

egyenlőtlenséget, az ún. *sugáregyenlőtlenséget* kapjuk; egyenlőség itt is csak a szabályos háromszög esetén áll fenn.

2. Ha P *a beírt kör középpontja*, tehát rajta van mindegyik szögfelezőn, legyen az A_1-ből induló f_a szögfelező végpontja A_1'. A szögfelezőtételt az $A_1A_2A_3$ háromszögre alkalmazva kapjuk, hogy (*3. ábra*)

$$A_2A_1' = \frac{ac}{b+c},$$

majd ugyanezt megismételve az $A_1A_1'A_2$ háromszögre és annak R_2 szögfelezőjére:

$$R_1 = \frac{cf_a}{c+\frac{ac}{b+c}} = \frac{(b+c)f_a}{a+b+c} = \frac{(b+c)f_a}{2s}.$$

Hasonlóan:

$$R_2 = \frac{(c+a)f_b}{2s}, \qquad R_3 = \frac{(a+b)f_c}{2s}.$$

Alkalmazzuk ezekre (1)-et:

$$\frac{1}{2s}\left((b+c)f_a+(c+a)f_b+(a+b)f_c\right) \geq 6r,$$

s mivel $rs = t$ (a háromszög területe),

$$(b+c)f_a+(c+a)f_b+(a+b)f_c \geq 12t;$$

ez a háromszög oldalai, szögfelezői és területe között ad meg összefüggést.

Ha viszont a *3. ábra* alakzatáról az

$$R_1 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad R_2 = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}, \quad R_3 = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

összefüggést olvassuk le és erre alkalmazzuk (1)-et, az

$$\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 2\cdot 3r = 6r,$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6$$

ismert összefüggés adódik.

3. Nevezetes egyenlőtlenség a következő: *ha P a háromszög tetszőleges belső pontja, akkor*

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 6r \tag{7}$$

és egyenlőség csakis a szabályos háromszög középpontjára áll fenn.

Legyen itt is P távolsága az oldalaktól r_1, r_2, r_3 és az A_1, A_2, A_3 csúcsokhoz tartozó magasságok rendre m_a, m_b, m_c. Mivel pl. A_1 távolsága a szemközti oldaltól m_a, $m_a \leq R_1 + r_1$ és ebből

$$r_1 \geq m_a - R_1, \text{ és hasonlóan } r_2 \geq m_b - R_2,\ r_3 \geq m_c - R_3.$$

(1) alapján tehát

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3) \geq 2(m_a + m_b + m_c) - 2(R_1 + R_2 + R_3).$$

Ebből

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c).$$

Ezért (7) bizonyításához elegendő lenne megmutatnunk, hogy $\frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c) \geq 6r$, azaz

$$m_a + m_b + m_c \geq 9r. \tag{8}$$

Ehhez felhasználjuk, hogy a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenségből

$$\frac{2s}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, \qquad \text{azaz} \qquad 2s(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$$

következik, továbbá, hogy pl. $m_a = \dfrac{2t}{a} = \dfrac{2rs}{a}$, és így

$$m_a + m_b + m_c = r \cdot 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9r,$$

amivel (8)-at és így (7)-et is bizonyítottuk.

(7) érvényességet egyébként a sík tetszőleges P pontjára is kiterjeszthetjük. Ehhez vegyük észre, hogy (1) bizonyítása – lényegtelen módosítással – akkor is érvényes, ha P a háromszög határának egy pontja.

Ha viszont P a sík háromszögön kívüli pontja, mindig található hozzá a háromszögnek olyan belső vagy határpontja, amelynek a csúcsoktól mért távolságösszege kisebb, mint a P-hez tartozó távolságösszeg, hiszen – mint ismeretes – a háromszög síkjának az a pontja, amelyre a csúcsoktól mért távolságösszeg minimális, a háromszög belső v. határpontja (az ún. izogonális pont, ill. a tompaszögű csúcs).

Ha P a köré írt kör középpontja, (7)-ből $3R \geq 6r$, azaz $R \geq 2r$ következik, ez ismét a sugáregyenlőtlenség.

4. Igen egyszerű megoldást adhatunk (1) felhasználásával az 1991. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia egy feladatára:

Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a $PAB\sphericalangle$, $PBC\sphericalangle$, $PCA\sphericalangle$ mindegyike nem lehet nagyobb $30°$-nál.

Ha a háromszögnek van legalább $150°$-os szöge, akkor van $30°$-osnál kisebb szöge is; az állítás akkor nyilvánvaló, a továbbiakban ezért ezt az esetet kizárjuk.

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a felsorolt szögek mindegyike nagyobb, mint $30°$. Ekkor a *4. ábra* jelöléseit használva kapjuk:

$$\frac{r_i}{R_i} = \sin\alpha_i > \sin 30° = \frac{1}{2},$$

tehát $R_i < 2r_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk, hogy $R_1 + R_2 + R_3 < 2(r_1 + r_2 + r_3)$, ami ellentmond (1)-nek, a kiindulási indirekt feltevés tehát nem lehet igaz.

III. Mivel a háromszöggeometriai tételeknek általában megvan a megfelelője a tetraéderek geometriájában is, kézenfekvő (1) megfelelőjét is megkeresni. A szabályos tetraéder középpontjának a csúcsoktól mért távolságösszege éppen háromszorosa a lapoktól mért távolságösszegnek, ezért logikus a következő sejtés:

Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder belső P pontjának az A_i csúcstól mért távolsága R_i, az A_i-vel szemközti laptól mért távolsága r_i, ezekre

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geq 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \tag{9}$$

teljesül. Egyenlőség csakis a szabályos tetraéder középpontjára áll fenn.

Ez a sejtés egyszerűen bizonyítható, ha a lapok területe egyenlő, (amiből egyébként a lapok egybevágósága is következik, ezek az ún. *egyenlő oldalú tetraéderek*). A bizonyítást ezeknek a tetraédereknek két sajátos tulajdonságára alapozzuk:

1. Minden magasságuk egyenlő; hiszen a magasság a térfogat háromszorosának és a magassághoz tartozó alapterületnek a hányadosa, ez viszont minden magasság esetén ugyanakkora.

2. A tetraéder tetszőleges belső P pontjának a lapoktól mért távolságösszege a magassággal egyenlő. Ez abból következik, hogy a tetraéder térfogata egyrészt $\frac{tm}{3}$, ahol t a lapterület, másrészt egyenlő annak a négy kis tetraédernek a térfogatösszegével, amelynek a csúcsai P, ill. egy-egy háromszöglap csúcsai; a P-ből induló magasság ezeknél rendre r_1, r_2, r_3, r_4 és így

$$\frac{tm}{3} = \frac{tr_1}{3} + \frac{tr_2}{3} + \frac{tr_3}{3} + \frac{tr_4}{3},$$

amiből

$$m = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

Mivel A_i távolsága a szemközti laptól m (*5. ábra*),

$$m \le R_i + r_i, \quad \text{azaz} \quad R_i \ge m - r_i \ (i = 1, \ \ldots, \ 4),$$

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \ge 4m - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4),$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor állhat, ha P rajta van minden magasságon, tehát létezik a tetraédernek magasságpontja, ez viszont az egyenlő oldalú tetraéderek közül csakis a szabályos tetraéderekre teljesül.

A (9) alatti sejtés azonban nem teljesül minden tetraéderre. Ezt egy szemléletes példán mutatjuk meg (*6. ábra*). Legyenek az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder $A_1A_2A_3$ és $A_1A_2A_4$ lapjai olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amelyek átfogói $A_1A_2 = \sqrt{2}$ és befogói egységnyiek, A_3A_4 „kicsi", és legyen P az A_1A_2 felezőpontja (vagy egy ahhoz nagyon közeli belső pont). Erre (jó közelítéssel)

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$r_1 = r_2 \approx \frac{1}{2}, \quad r_3 = r_4 = 0,$$

és így $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \approx 1$, ezért (9) biztosan nem teljesül. A fenti példa egyébként azt az általánosan elfogadott sejtést indokolja, hogy (9)-ben a minden tetraéderre érvényes állandó $2\sqrt{2}$, de egyenlőség nem állhat; ennek bizonyítása azonban (tudtommal) még várat magára.

Az Erdős–Mordell-tétel különösen alkalmas arra, hogy állítását sokszögekre általánosítsuk. Helyettesítsük benne a háromszöget konvex n-szöggel, az erre vonatkozó általánosítást Fejes Tóth László mondta ki (1948):

Legyen P az $A_1A_2 \ldots A_n$ konvex sokszög egy belső pontja, és jelölje a P távolságát A_i-től R_i, az A_iA_{i+1} egyenestől pedig r_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ A_{n+1} = A_1)$. Ezekre fennáll az

(10) $$R_1 + R_2 + \cdots + R_n \ge \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$$

egyenlőtlenség, és az egyenlőség csak a szabályos n-szög középpontjára teljesül.

(Ez az állítás $n = 3$ esetén éppen (1)-et adja).

Ezt a sejtést H. C. Lenhard bizonyította be valamivel általánosabban, nem kell ui. kikötni a sokszög konvex voltát, hanem csupán azt, hogy *P-ből lehessen látni a sokszög határának minden pontját*. Tovább általánosította ezt az eredményt P. Pech (1994) térbeli sokszögekre, ennél P-nek hozzá kell tartoznia a sokszög *konvex burkához*.

IV. Az (1) további általánosításai algebrai, ill. függvénytani alakjából indulnak ki. (1)-et

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} \ge 2\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

alakban írva azt jelenti, hogy *a csúcsoktól mért távolságok számtani közepe nem kisebb az oldalaktól mért távolságok számtani közepének a kétszeresénél.* Ez adja az ötletet, hogy az egyenlőtlenséget a leggyakrabban használt középértékek körében általánosítsuk.

Jelölje az x_1, x_2, $\ldots$, x_n nemnegatív számok számtani (aritmetikai), geometriai, ill. harmonikus közepét rendre

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad G(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad H(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

A konvex n-szög (10)-ben használt jelöléseivel tételünk általánosítása (Fejes Tóth Lászlótól):

(11) $$A(R_1, R_2, \ldots, R_n) \ge \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} A(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

(12) $$G(R_1, R_2, \ldots, R_n) \ge \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} G(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

(13) $$H(R_1,R_2,\dots,R_n)\ge \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}H(r_1,r_2,\dots,r_n).$$

Ezek közül (11) azonos a már említett (10)-zel, (12) bizonyítása Fejes Tóth Lászlótól származik, ő mutatott rá a (11) és (13) közötti transzformációs kapcsolatra is. ((12) és (13) bizonyítása $n=3$ esetre [1]-ben megtalálható).

További általánosításokat, ill. rokon tételeket kaphatunk, ha (11)- (13)-ban az A, G, H függvénykapcsolatokat más függvénykapcsolatokkal helyettesítjük. Ezek közül sorolunk most fel néhány érdekesebb összefüggést; érdemes ezek bizonyítását megkísérelni.

a) Vezessük be az $X=R_1^t+R_2^t+R_3^t$, $Y=r_1^t+r_2^t+r_3^t$ jelöléseket, t valós számot jelöl. Ezekkel

$$X<2Y,\quad \text{ha}\quad t<-1, X\le 2^tY,\quad \text{ha}\quad -1\le t\le 0, X\ge 2^tY,\quad \text{ha}\quad 0\le t\le 1, X>2Y,\quad \text{ha}\quad t>1.$$

b) $R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1\ge 4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)$,

c) $R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1\ge (r_1+r_2)(r_3+r_1)+(r_2+r_3)(r_1+r_2)+(r_3+r_1)(r_2+r_3)$,

d) $R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1\ge 2(r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3)$,

e) $R_1R_2R_3\ge (r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)$,

f) $r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3\ge 2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)$,

g) $\dfrac{R_1}{R_1+r_1}+\dfrac{R_2}{R_2+r_2}+\dfrac{R_3}{R_3+r_3}\ge 2.$

V. A geometriai tételek közös „sorsa”, hogy megvizsgálják érvényességüket, ill. megkeresik megfelelőiket a *nem-euklideszi geometriákban* is.

Az ún. *elliptikus geometriában*, aminek legegyszerűbb modellje a félgömb geometriája, érvényes a következő tétel: *Ha P az $A_1A_2A_3$ gömbháromszög belső pontja és ennek (gömbi szög-) távolsága a csúcsoktól R_1, R_2, R_3, az oldalaktól r_1, r_2, r_3 akkor*

$$\operatorname{tg}R_1+\operatorname{tg}R_2+\operatorname{tg}R_3\ge 2(\operatorname{tg}r_1+\operatorname{tg}r_2+\operatorname{tg}r_3).$$

Ennek bizonyítása a gömbháromszögek trigonometriájának a felhasználásával történhet.

Lényegesen egyszerűbb a helyzet a *Bolyai–Lobacsevszkij-féle* (v. más elnevezéssel: *hiperbolikus*) *geometriában*, mert annak *Cayley–Klein-féle modelljén* az euklideszi távolságokat a megfelelő hiperbolikus geometriai távolságoknak feleltethetjük meg, ha a P pontnak a modellkör középpontját választjuk (l. pl. [4]-et). Ezzel a

$$\operatorname{th}\frac{R_1}{k}+\operatorname{th}\frac{R_2}{k}+\operatorname{th}\frac{R_3}{k}\ge 2\left(\operatorname{th}\frac{r_1}{k}+\operatorname{th}\frac{r_2}{k}+\operatorname{th}\frac{r_3}{k}\right)$$

összefüggést kapjuk, ahol k a hiperbolikus sík állandója, $\operatorname{th}x$ (olv.: tangens hiperbolikusz x) pedig definíció szerint az $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ hányadossal egyenlő.

Nem tértünk ki – az említetten kívül – e tételkör három – és magasabb dimenziójú általánosításaira; itt a helyzet már bonyolultabbá válik, hiszen pl. a poliédereknél beléphetnek az élektől, ill lapoktól való távolságok is, és – mint láttuk – más nehézségek is felléphetnek. Ennek ellenére már itt is sok eredmény született az Erdős–Mordell egyenlőtlenség sugalmazására.

Reiman István

Referenciák

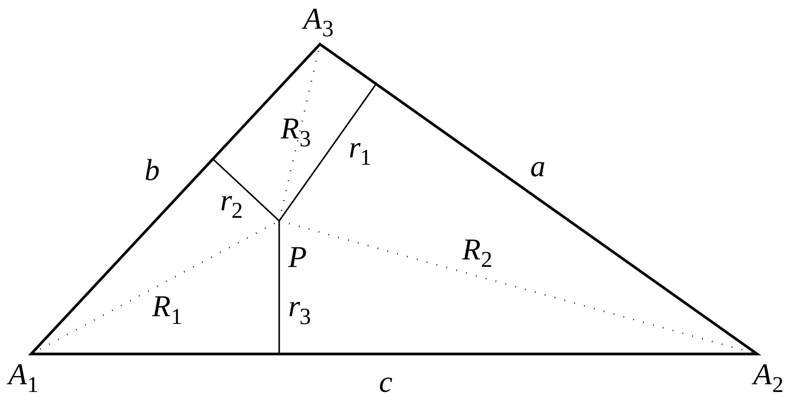
[1]D. O. Skljárszkij–N. N. Csencov–J. M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/2. *Tankönyvkiadó, Bp., 1973.*

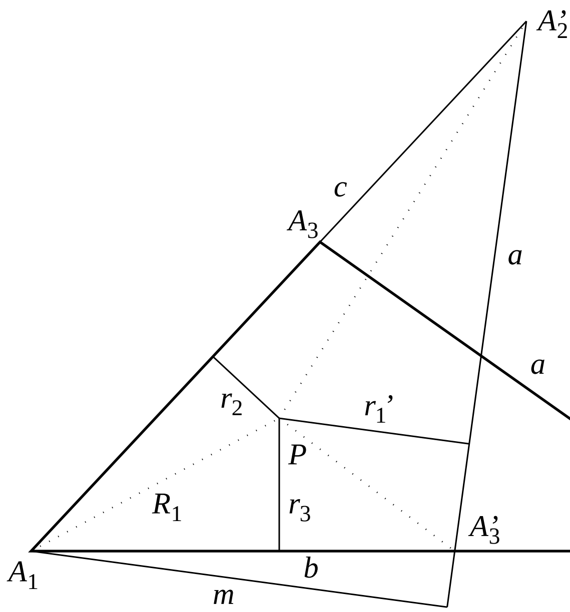
[2]N. D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek. *Gondolat, Bp., 1980.*

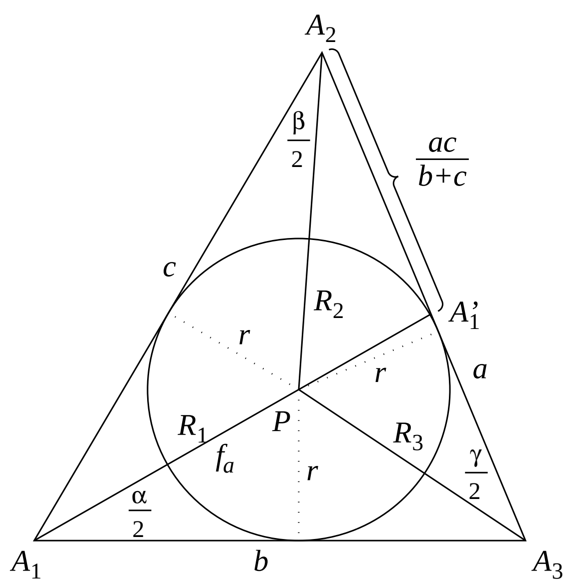
[3]Molnár E.: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970. *Tankönyvkiadó, Bp., 1974.*

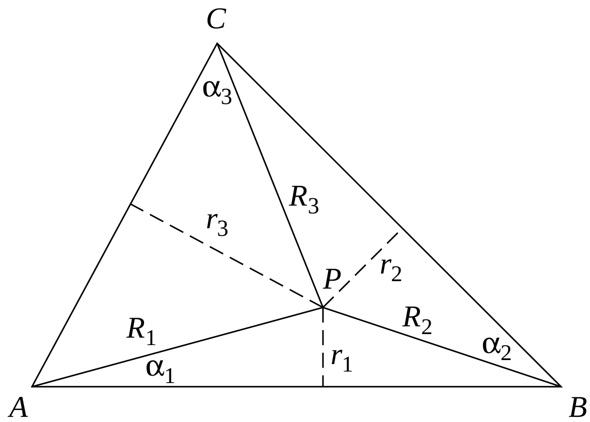
[4]Reiman I.: A geometria és határterületei. *Gondolat, Bp., 1986.*

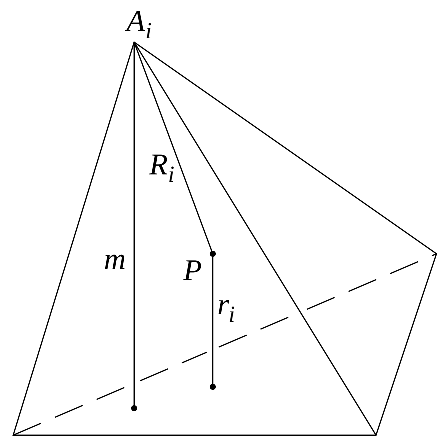
[5]Reiman I.: Fejezetek az elemi geometriából. *Tankönyvkiadó, Bp., 1987.*

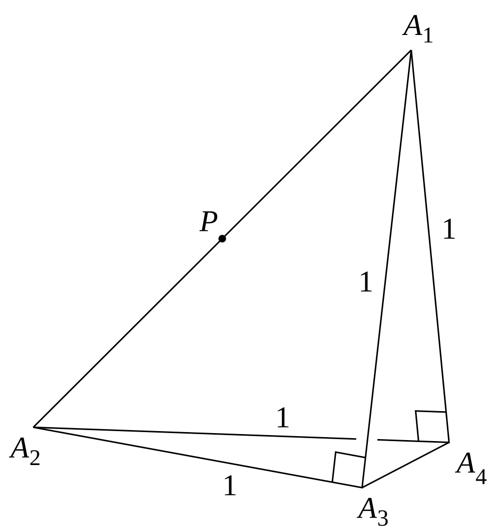

A_3
R_3
r_1
b
a
r_2
P
R_2
R_1
r_3
A_1
c
A_2


A_2'
c
A_3
a
a
r_2
r_1'
P
R_1
r_3
A_3'
A_1
b
A_2
m


A_2
$\frac{\beta}{2}$
$\frac{ac}{b+c}$
c
R_2
A_1'
r
r
a
R_1
P
R_3
f_a
r
$\frac{\gamma}{2}$
$\frac{\alpha}{2}$
A_1
b
A_3


C
α3
R3
r3
r2
P
R1
R2
α2
α1
r1
A
B


Ai
Ri
m
P
ri


A1
P
1
1
1
1
A2
A4
A3