A sakkjáték, a sakktábla és a figurák matematikai: kombinatorikai, gráfelméleti stb. problémák egész sorát vetik fel a legkönnyebbektől a legnehezebbekig. Ebben a tanévben néhány cikkel és néhány kitűzött gyakorlattal szeretnénk felkelteni az érdeklődést a téma iránt. A megoldásokhoz nem kell tudni sakkozni, elég logikusan gondolkozni!

⋆

A sakkjáték legfontosabb figurája a király. Egy királynak a sakktáblán azok a figurák a szomszédai, amelyek olyan mezőkön állnak, melyeknek van a király mezőjével közös határpontja. Képzeljük el, hogy elegendően sok királyunk van, s belőlük minél többet akarunk felállítani a sakktáblára, azzal a feltétellel, hogy egy zárt láncot (kört) alkossanak. Jelentse ez most azt, hogy bármely királynak pontosan két szomszédja van, és ha valamelyikük pl. jobbra „egy hírt a szomszédja fülébe súg”, akkor ha mindegyikük rendre ugyanezt teszi, mindenki tudomására jut, sőt a „hírt felröppentő” balról vissza fogja hallani.

Vajon legfeljebb hány király állhat „körben” a sakktáblán?

Mint hasonló kérdéseknél mindig, érdemes $n \times n$-es „általánosított sakktáblán” gondolkodni. Nyilvánvaló, hogy 2×2-esen 3 király állhat körben; 3×3-ason pedig legfeljebb 4, – a pepita mezőszínezést használva – a középső mező színével ellentétes mezőkön. Az első nekirugaszkodásra a 4, 5, 6 oldalú négyzetben úgy állítjuk fel a királyokat, hogy a tábla szélén, de ne sarokmezőn álljanak. Így rendre 8, 12, 16 királyt sikerül körbe állítanunk. De vajon nem lehet-e többet?

A 8×8-as sakktábláig már csak egyetlen kisebb eset van. A 7×7-es négyzetre az *1. ábra* szerint 24 királyt rakhatunk fel. Most tehát nem néggyel, hanem nyolccal nőtt a királyok száma. A hullámszerű konstrukció „kihasználja” a tábla belsejét is. A 8×8-asra azonban ugyanannyi hullám fér, tehát csak a hullám méreteinek növekedése a „nyereség”. Ezzel a módszerrel a klasszikus sakktáblára 30 királyt állíthatunk körbe.

Ne álljunk meg 8-nál!

A hullámok száma $n = 4k + 3$-nál k, s ugyanennyi marad, ha az n eggyel, kettővel vagy hárommal növekszik.

Emiatt ezzel a konstrukcióval kapott „királyi körökben” a királyok száma:

$$\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}, \qquad \text{ha } n \equiv 3 \pmod 4, \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 2, \qquad \text{ha } n \equiv 0 \pmod 4, \frac{n^2}{2} - n + \frac{9}{2}, \qquad \text{ha } n \equiv 1 \pmod 4, \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 7, \qquad \text{ha}$$

Nem lehetnénk ügyesebbek?

Az világosnak tűnik, hogy „érdemes” a tábla szélét kihasználni, és a problémát a belsejének felépítése jelenti. Próbálkozzunk rekurzívan!

Ha $n \geq 7$, akkor válasszuk ketté a táblát egy $(n-4) \times (n-4)$-es „centrumra” és egy 2 mező szélességű „keretre”. A keret külső szélére – kivéve a sarkokat – helyezzünk el királyokat ($4 \cdot (n-2)$ db-ot). Tegyük fel, hogy a centrumban már létezik egy királyi lánc. Elég lenne ezután mindkét zárt láncot megbontani, „egy-két láncszemet kivenni, s összekötni a végeket”. Ekkor egy zárt láncot kapnánk, amely közel lenne az optimálishoz, ha a néggyel kisebb $(n-4)$-re elég hosszú volt a kör.

7-re ugyanazt kapjuk, mint korábban. Vajon a „klasszikus sakktáblán” sem javul a helyzet? A *2. ábra* szerint igen! Létezik 31 királyból álló kör!

$n = 9$-re a centrum 5×5-ös. Most csak két láncszem „elvesztésével” megy a két kör összekötése (8-ra egy, 7-re 0 király „veszett el”).

10-re a centrum 6×6-os. Ha a 16 hosszú kört a centrumban módosítjuk azzal, hogy az egyik királyt egy lépéssel beljebb helyezzük, akkor az összekapcsolódásnál fellépő veszteség újra csak 1 lesz. Később az összefűzésnél már nem veszítünk!

A 7, 8, 9, 10 oldalú sakktáblára most konstruált királyi körök (*3. ábra*) olyanok, hogy létezik egy „hullámcsúcsuk”, amelyhez a további kör veszteség nélkül kapcsolható. Ez a jó tulajdonság később is megmarad.

Folytatva az eljárást, a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}, \qquad \text{ha } n \equiv 3 \pmod 4. \frac{n^2}{2} - 1, \qquad \text{ha } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ és } n > 4;\ n = 4\text{-re } 8. \frac{n^2}{2} - \frac{5}{2}, \qquad \text{ha } n \equiv 1 \pmod 4 \text{ és } n > 5;\ n$$

Összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy a második konstrukció lényegesen jobb, mint az első. Nem tudnánk beférkőzni a királyok közé?

⋆

Cikkünk nem zárja le a problémakört, érdemes rajta tovább gondolkodni. Hozzászólásaikat a szerkesztőség címén várja a szerző:

Blázsik Zoltán