Az évente váltakozva Magyarországon, ill. Izraelben megrendezett matematikaversenynek idén április 6–12. között Budapest volt a helyszíne. A csapatok szokás szerint 4 versenyzőből és 1 csapatvezetőből állnak. Az izraeli csapat vezetője Shay Gueron (Technion, Haifa), a magyar csapaté Pelikán József (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest) volt. A versenyzők nevét alább, az eredmények ismertetésénél közöljük.

Mint a korábbi években is, az első versenynapon a versenyzőknek egyénileg 4 feladatot kellett 4 óra alatt megoldani. Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximálisan 28 pontot, tehát a csapat 112 pontot szerezhetett. A második versenynap csapatverseny volt: a csapat 4 tagjának közösen dolgozva kellett 4 óra alatt megoldani egy előre kijelölt témából kitűzött feladatokat. (A két versenynapon kitűzött feladatokat a cikk végén ismertetjük.) Ez a téma idén „algebrai síkgörbék (elsősorban harmadrendű görbék)” volt. (Tavaly „algoritmusok”, két éve „véges csoportok”, három éve „Fibonacci-számok és általánosításaik” volt a kijelölt téma.)

A magyar csapat tagjainak felkészítését a versenyre – mint már sok éve – Reiman István végezte, rajta kívül Benczúr Péter és Szőnyi Tamás is részt vett a felkészítésben. Köszönet valamennyiüknek.

Mindkét csapat nagyon jól szerepelt a versenyen. A magyar csapatból Szádeczky-Kardoss Szabolcs 26, Koblinger Egmont 24, Valkó Benedek 22 pontot szerzett (mindhárman a Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. oszt. tanulói), Burcsi Péter pedig (Pápa, Türr István Gimnázium, III. oszt.) 24 pontot ért el. A magyar csapat összpontszáma tehát 96 pont volt.

Az izraeli csapatból Maxim Iorsh 28, Lev Bohovski és Or Tzuk 20–20, Lev Radzivilovski pedig 17 pontot szerzett. Így az izraeli csapat összpontszáma 85 pont volt.

A csapatversenyben mindkét csapat megoldotta az 1., 2. feladatot, valamint a 3. és 4. feladat a) részét. A magyarok ezenkívül megoldották a 3.b) feladatot, és megadták a helyes választ (bizonyítás nélkül) a c) részre, továbbá részben megoldották a 4.b) feladatot. Az izraeli csapat megoldotta a 4.b) feladatot és részben megoldotta a 3.b) feladatot. (A csapatversenyben hagyomány, hogy mellőzzük a formális pontozást, csak szóban értékeljük az eredményt.)

Az izraeli csapat részére számos programot szerveztünk; többek között visegrádi, valamint szentendrei kirándulást, budapesti városnézést, továbbá színházlátogatást is. Ezen programok lebonyolításáért és a héber nyelvű tolmácsolásért Rácz Andrást illeti köszönet.

Köszönettel tartozunk még Lippner Györgynek, a Lauder Javne Zsidó Közösségi Iskola igazgatójának, aki helyszínt biztosított a versenydolgozatok megírásához.

Pelikán József

1995. évi magyar–izraeli matematikaverseny feladatai

Első nap
Egyéni verseny

1. Jelölje S_n az első n prímszám összegét. Bizonyítsuk be, hogy S_n és S_{n+1} között mindig van négyzetszám.

2. P_1, P_2, P_3, P_4 és P legyen egy kör öt pontja. Jelöljük a P pont távolságát a P_iP_k egyenestől d_{ik}-val. Bizonyítsuk be, hogy

$$d_{12}d_{34} = d_{13}d_{24}$$

3. Az

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

polinomra teljesül $|f(x)| \leq 1$ az $x \in [0,1]$ intervallumban. Mennyi az

$$|a| + |b| + |c|$$

maximuma?

4. Egy konvex poliéderünk van, amelynek minden lapja háromszög. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet az éleket pirossal és kékkel színezni úgy, hogy minden csúcsból minden csúcsba el lehet jutni csupa piros élen át és csupa kék élen át is.

2. nap
Csapatverseny

1. Tekintsük az $x^4 - x^2y = a$ egyenletű görbéket, ahol a bármely pozitív szám lehet. Messük el ezeket egy fix egyenessel, amelyik párhuzamos az y-tengellyel. Minden metszéspontban tekintsük az adott görbe érintőjét.

a) Bizonyítsuk be, hogy az összes így kapott érintő egy közös ponton megy át.

b) Mi a mértani helye ezen fent definiált közös pontnak, ha az y-tengellyel párhuzamos egyenes nem fix, hanem az összes ilyen egyenest tekintjük?

2. Tekintsük az $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ görbét ($x>0$, $y>0$). Vegyük az összes P pontjában az érintőjét. Tekintsük ennek az x-tengely és az y-tengely közti szakaszát, amelynek az y-tengelyen lévő végpontját nevezzük Q-nak. Ezen a két tengely közti szakaszon a Q pontból mérjünk vissza az x-tengelyen lévő metszéspont irányába egy fix b távolságot. Az így kapott QR szakasz (amelynek a hossza tehát b) R végpontjának mi a mértani helye, ha P befutja a görbét?

3. Tekintsük az ABC háromszöget.

a) Mindegyik oldalegyenesén vegyünk egy-egy pontot: P_1, Q_1, R_1. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy ez a három pont egy egyenesre essék?

b) Mindegyik oldalegyenesen vegyünk két-két pontot: P_1, P_2, Q_1, Q_2 és R_1, R_2. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy ez a hat pont egy másodfokú görbe és a háromszög közös része legyen?

c) Mindegyik oldalegyenesen vegyünk három-három pontot: P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy ez a kilenc pont egy harmadfokú görbe és a háromszög közös része legyen?

4. Tekintsük a $\{t, t^2, t^3 \mid t \in \mathbf{R}\} =: C$ térgörbét. Melyek azok a $P=(a,b,c)$ pontok, amelyekből C-t az x, y síkra vetítve a kapott harmadfokú görbének szinguláris pontja van, mégpedig

a) csúcs b) csomó (azaz önátmetszés)?