Ilyenkor, tavasszal, április táján, a matematika fejlődése mindig új lendületet vesz. Eddig ismeretlen tehetségek lépnek elő az ismeretlenségből, akik bebizonyítják a Fermat-sejtést, megoldják az ötödfokú egyenletet, vagy négyszögesítik a kört.

Mi most ennél sokkal kisebb feladatra vállalkozunk. Egy olyan új matematikai elméletet szeretnénk felállítani, amely az ember ősi barátairól és társairól, a lovakról szól.

⋆

A lóelmélet alapvető definícióihoz szükség lesz az ekvivalencia-reláció fogalmára.

Matematikai konstrukciókban gyakran előfordul, hogy egy halmazt osztályokra (kisebb, páronként diszjunkt halmazokra) bontunk, majd az osztályoknak – mivel maguk is érdekesek – különböző neveket adunk. A nehéz áttekinthetőség miatt többnyire nem az osztályokat definiáljuk, hanem bármely két elemre előírjuk, hogy egy osztályba kerüljenek-e.

Például osztályozhatjuk az egész számokat úgy, hogy x és y akkor kerüljenek egy osztályba, ha $x - y$ osztható 10-zel. A keletkező osztályokat „modulo 10 maradékosztályoknak” nevezzük.

Egy másik példa a racionális számok megkonstruálása. Ehhez úgy osztályozzuk az $\frac{a}{b}$ alakú törtek halmazát, ahol a, b egész számok, és $b \neq 0$, hogy $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ akkor kerüljenek egy osztályba, ha $ad = bc$. Ezután a törtek osztályait elnevezzük „racionális számoknak”. A racionális számok tehát nem azonosak a törtekkel, a törtek csupán a racionális számok „reprezentánsai”.

Harmadik példánkban a tér irányított szakaszainak halmazát osztályozzuk úgy, hogy két irányított szakasz akkor kerüljön egy osztályba, ha párhuzamosak, azonos irányúak és egyforma hosszúak. A keletkező osztályokat „vektoroknak” nevezzük.

Képzeljük most el, hogy egy H halmazon definiáltunk egy $\sim$ relációt, és azt akarjuk, hogy két elem: x és y akkor kerüljenek egy osztályba, ha $x \sim y$. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie ennek a relációnak? Három nagyon egyszerű tulajdonságot tudunk felírni, amelyek feltétlenül szükségesek:

a) A reláció reflexív, azaz minden $x \in H$-ra $x \sim x$.

b) A reláció szimmetrikus, azaz ha $x \sim y$, akkor $y \sim x$.

c) A reláció tranzitív, azaz ha $x \sim y$ és $y \sim z$, akkor $x \sim z$.

E három tulajdonság azt fejezi ki, hogy minden elem egy osztályba kerül önmagával; ha x és y egy osztályban van, akkor y és x is egy osztályban van; végül, ha x és y egy osztályban van, valamint y és z is egy osztályban van, akkor x és z is egy osztályban van. Az ilyen tulajdonságú, tehát reflexív, szimmetrikus, tranzitív relációkat nevezik ekvivalencia-relációknak.

Be lehet bizonyítani, hogy a három felsorolt tulajdonság már elégséges; egy ekvivalencia-reláció mindig egyértelműen meghatároz egy osztályokra (úgynevezett ekvivalencia-osztályokra) bontást.

⋆

Most már rátérhetünk a lóelmélet fogalmaira.

Definíció. Egy $f : (0, \infty) \to R$ függvényt „lábnak” nevezünk, ha $p(x) + \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ alakú, ahol p polinom, k egész szám és $p(0) = 0$. A lábak halmazát (az angol kezdőbetű alapján) $\mathcal{F}$-fel jelöljük.

Definíció. Az f_1 és f_2 lábakat ekvivalensnek nevezzük (jelben: $f_1 \sim f_2$), ha az $f_1 - f_2$ függvény korlátos. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát ekvivalencia-reláció.

Definíció. Az $\mathbf{F}$ lábhalmaz $\sim$ szerinti ekvivalencia-osztályait „lovaknak” nevezzük. A lovak, azaz $\mathbf{F}$ ekvivalencia-osztályainak halmazát pedig – szintén az angol kezdőbetű alapján –, $\mathbf{H}$-val jelöljük.

Ezeknek a definícióknak nagyon szemléletes jelentése van. A lólábak olyan függvények, amelyek minden pillanathoz hozzárendelik azt a helyet, ahol a láb éppen van. A lovak lólábakból álló halmazok. Két láb akkor tartozik ugyanahhoz a lóhoz, ha mindig bizonyos távolságon belül maradnak.

Hogy a definiált objektumok mennyire hasonlítanak a valóságos lovakra, a következő két tétel mutatja meg.

Tétel (A lóelmélet első főtétele). *Tetszőleges $H \in \mathbf{H}$-ra $|H| = 4$, azaz minden lónak négy lába van.*

Bizonyítás. Legyen $f_1(x) = p_1(x) + \sin\left(x + \frac{k_1\pi}{2}\right)$ és $f_2(x) = p_2(x) + \sin\left(x + \frac{k_2\pi}{2}\right)$ két ekvivalens láb. Az ekvivalencia azt jelenti, hogy $f_1(x) - f_2(x) = p_1(x) - p_2(x) + \sin\left(x + \frac{k_1\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{k_2\pi}{2}\right)$ korlátos. Mivel a szinuszfüggvény korlátos, ez pontosan akkor teljesül, ha a $p_1(x) - p_2(x)$ polinom korlátos. Egy polinom azonban akkor korlátos (még a pozitív félegyenesen is), ha konstans. Mivel azonban a láb definíciója szerint $p_1(0) = p_2(0) = 0$, mindez azt jelenti, hogy a p_1 és p_2 polinomok azonosak. f_1 és f_2 tehát csak a k_1 és k_2 egészekben különbözhetnek. Mivel a $\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ függvény k-tól függően négyféle lehet, minden ekvivalenciaosztály négyelemű.

Előfordulhat, hogy egy ló két lába egy bizonyos időpontban ugyanazon a helyen van. Az ilyen pillanatok igen nevezetesek.

Definíció. Legyen $H \in \mathbf{H}$, és $f_1, f_2 \in H$ két különböző láb. Ha valamely $t \in (0, \infty)$-re $f_1(t) = f_2(t)$, akkor azt mondjuk, hogy a H ló a t pillanatban megbotlik.

Tétel (A lóelmélet második főtétele). *Minden $H \in \mathbf{H}$ lóhoz létezik végtelen sok olyan $t \in (0, \infty)$ pillanat, amikor megbotlik.*

Bizonyítás. Legyen H egyik lába $f_1(x) = p(x) + \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, és legyen $f_2(x) = p(x) + \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$. A két láb ekvivalens, mert a különbségük,

$$f_1(x) - f_2(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x + \frac{(2k+1)\pi}{8}\right)$$

korlátos. Ebből pedig következik, hogy f_2 is lába H-nak. Másrészt ez a különbség végtelen sokszor 0 $\left(x = \left(l - \frac{k}{4} + \frac{3}{8}\right)\pi\right.$ esetén, ahol $l \geq \frac{k}{4} - \frac{3}{8}$ egész szám), vagyis H végtelen sokszor megbotlik.

Feladat. A lóelméletben a polinomokat „fenéknek” is nevezik és – az angol kezdőbetű alapján – többnyire b-vel jelölik. Azt mondjuk, hogy a H ló megülhető a b fenékkel, ha minden $f \in H$-ra és $t > 0$ valós számra $f(t) < b(t) < f(t) + 10$. Bizonyítsuk be, hogy egy fenékkel csak egy lovat lehet megülni, de egy lovat lehet több fenékkel is.

⋆

A lóelméletben még nagyon sok felderítetlen kutatási irány van, ezek vizsgálatát az Olvasóra hagyjuk.

A lovakhoz hasonlóan más állatfajták (kutya, tyúk, giliszta, stb.) axiomatikus leírása is szükségesnek látszik, ezeknél nyilván más népi bölcsességeket kell figyelembe venni (ebcsont beforr, vak tyúk is talál szemet, stb.). Végül a különböző állatfajták leírását célszerű lenne egységes rendszerbe foglalni. Ezeket a munkákat is az Olvasóra hagyjuk.

Jó szórakozást!

Pej Nyihamér