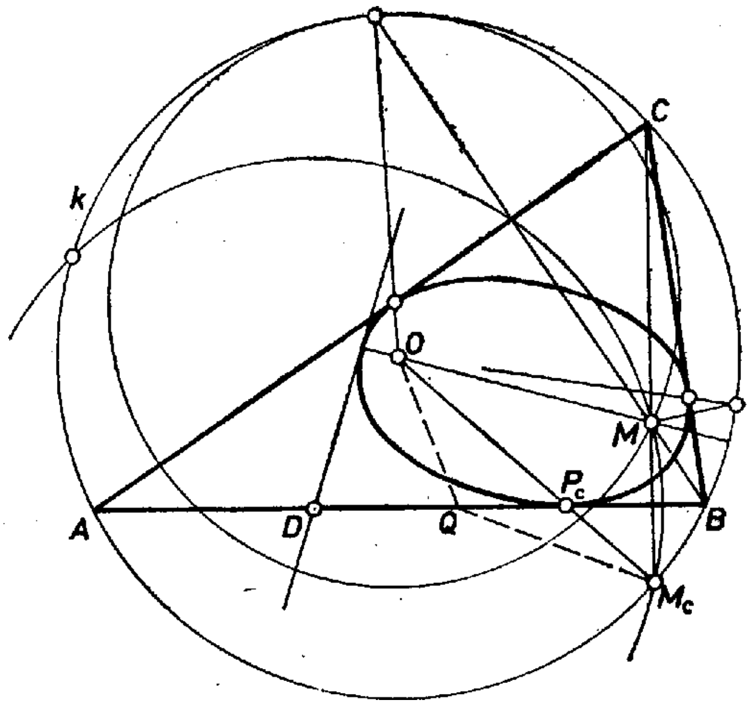
Mivel a háromszög hegyesszögű, mind O, mind M a háromszög belsejében van.

Tudjuk, hogy a háromszög magasságpontját bármely oldalára tükrözzük, a tükörkép rajta lesz a háromszög köré írható körön. Tükrözzük M-et AB-re, jelöljük tükörképét M_c-vel, az M_cO szakasznak AB-vel közös pontját P_c-vel (mivel a háromszög hegyesszögű, van ilyen pont). A tükrözés miatt $MP_c = M_cP_c$, $OP_c, +P_cM = OP_c + P_cM_c = OM_c = r$ az ellipszis nagytengelye, azaz P_c rajta van az O, M fókuszú $OM_c = r$ hosszúságú nagytengelyű ellipszisen.



Belátjuk, hogy az AB egyenesnek több ilyen tulajdonságú pontja nincs. Legyen Q tetszőleges, AB-re illeszkedő, P_c-től különböző pont. Mivel M_c az M tükörképe AB-re, ezért $M_cQ = MQ$, így $OQ + QM = OQ + QM_c$. Tekintsük az OM_cQ háromszöget! A háromszög-egyenlőtlenség miatt $OQ + QM_c > OM_c = r$, így Q nem pontja az ellipszisnek. Mivel P_c belső pontja AB-nek, ezért AB szakasznak egyetlen közös pontja van az ellipszissel, így azt is mondhatjuk, hogy AB érintő. Az AB tetszőleges oldala volt a háromszögnek, ezért az állítást mindhárom oldalra beláttuk.

Megjegyzések. 1. A látott tulajdonság alapján szinte nyilvánvaló, hogy a tekintetbe vett ellipszis adja azon körök középpontjának mértani helyét, amelyek átmennek az (ABC háromszög köré írt k körben levő) M ponton és (belülről) érintik k-t. Az ellipszisnek ilyen felfogása alkalmat ad számos szerkesztésre. Itt az O és M fókuszok egyenrangúsága nem érvényesül, ezért szokás más neveket használni: a k kör az ún. ellenkör (sugara a nagytengely), O az ellenkör középpontja és M „a" fókusz. (Természetesen lehetne M körül is felvenni ellenkört, a két ellenkör egyidejű felhasználása viszont nem ígér előnyt.)

Csak egy efféle szerkesztési példát említünk (elfogadva a fentiekből, hogy az AB egyenes az ellipszisnek P_c-beli érintőjével azonos): húzzuk meg az érintőket az ellipszishez az AB egyenes tetszőleges (A-tól, B-től és P_c-től különböző) D pontjából. A fentiekből $DM_c = DM$, tehát a D körüli M-en (a fókuszon) átmenő kör az ellenkörből kimetszi a (P_c) érintési pontot tartalmazó OM_c ellenköri sugár M_c végpontját, így a keresett (egyik) érintő az MM_c szakasz felező merőlegese. – Az olvasóra hagyjuk annak vizsgálatát, milyen helyzetű D-hez adódik 2, ill. 1 érintő, és hogy milyen D-hez nem kapunk M_c-t, érintőt.

Az érdeklődőknek ajánljuk a következő szakköri füzetet: Schopp János: Kúpszeletek (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.)

3. Az eddigieket folytatva, eredeti feladatunk egyértelmű a következő tétellel: az ellipszis bármely érintője 2 pontban metszi az ellenkört (fent A és B). Megrajzolva e pontokból az ellipszis második érintőit, ezek (C) metszéspontja rajta van az ellenkörön. (Szokásos kifejezéssel: a három érintő *záródik*, az eljárást folytatva további új érintőt nem kapunk.) Ez a tétel *Schopp* Jánostól (Budapest) származik.