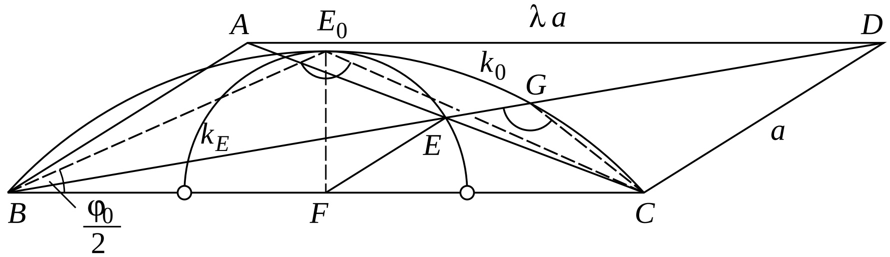
1. *Jelölje egy paralelogramma két szomszédos oldalának az arányát λ (ahol $\lambda > 1$). Határozzuk meg, hogy hogyan függ λ-tól az átlók közti hegyesszög legnagyobb lehetséges értéke.*

I. megoldás. Tekintsünk egy $ABCD$ paralelogrammát, amelyikben AB és BC hossza a, illetőleg λa ($\lambda > 1$), az átlók metszéspontja és a BC oldal felezőpontja E, illetőleg F. Ekkor E egyben az átlók közös felezőpontja is, így EF az AB-vel párhuzamos középvonal fele, hossza $\frac{1}{2}a$. A szóba jövő E pontok tehát az F középpontú, $\frac{1}{2}a$ sugarú k_E kör pontjai, kivéve a BC egyenessel való két metszéspontot, amelyek a kör átellenes pontjai. Szimmetria okokból elég a BC egyenes egyik oldalán levő félkört vizsgálni (*1. ábra*).



1. ábra

A kör átmérője a BC szakasz része. Az átlók szöge a BC szakasz látószöge E-ből, tehát tompaszög (hiszen az átmérő látószöge derékszög). Ennek az α szögnek a lehető legkisebb értékét kell tehát meghatároznunk.

Belátjuk, hogy α értéke a félkör E_0 felezőpontjára a legkisebb. A BCE_0 háromszög köré írt k_0 kört belülről érinti k_E, mert mindkét kör középpontja a BC-re F-ben emelt merőlegesen van, és k_E átmérője a BC szakasz része. A DE és k_0 metszéspontját G-vel jelölve

$$CEB\sphericalangle = CGB\sphericalangle + GCE\sphericalangle > CGB\sphericalangle = CE_0B\sphericalangle,$$

amint állítottuk.

A keresett legnagyobb hegyesszög, φ_0 ennek a szögnek mellékszöge, és mivel a BCE_0 háromszög egyenlő szárú, az $E_0BF\sphericalangle$ kétszeresével egyenlő, tehát például így fejezhető ki λ-val a BE_0F derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{BF}{E_0F} = \frac{\frac{1}{2}\lambda a}{\frac{1}{2}a} = \lambda, \quad \text{azaz} \quad \varphi_0 = 2\operatorname{arcctg}\lambda,$$

ahol az arkusz-függvény 0° és 90° közé eső értékét kell venni.

Megjegyzés. A feladat szövege feltételezte ugyan, de meggondolásaink során bizonyítást is nyert, hogy ezt a maximális értéket fel is veszi az átlók szöge, és azt is beláttuk, hogy a téglalapban a legnagyobb ez a szög.

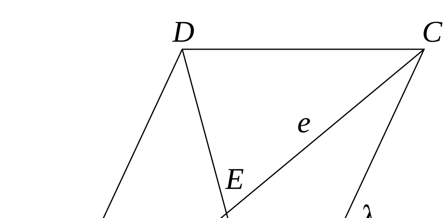
II. megoldás. Válasszuk mértékegységnek az AB oldal hosszát, ekkor BC hossza λ. Jelöljük az átlók metszéspontját (ami közös felezőpontjuk is) E-vel, AE és EB hosszát e-vel, illetőleg f-fel, a köztük levő szöget φ-vel (*2. ábra*).

A koszinusztételt alkalmazzuk az AEB és a BEC háromszögre.

$$1 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\varphi, \lambda^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos(180^\circ - \varphi) = e^2 + f^2 + 2ef\cos\varphi.$$

A megfelelő oldalak összegét és különbségét képezve

$$\lambda^2 + 1 = 2(e^2 + f^2), \qquad \lambda^2 - 1 = 4ef\cos\varphi.$$



2. ábra

A második egyenlőség bal oldala pozitív, így $\cos\varphi$ pozitív, φ tehát hegyesszög.

Alkalmazzuk a második egyenlőségben e^2-re és f^2-re a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget, és használjuk fel az első egyenlőtlenséget:

$$\lambda^2 - 1 \leq 4\left(\frac{e^2+f^2}{2}\right)\cos\varphi = (\lambda^2+1)\cos\varphi.$$

Innen

$$\cos\varphi \geq \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1},$$

és akkor áll fenn egyenlőség, ha $e = f$, azaz ha a paralelogramma téglalap. Mivel a koszinusz-függvény a $(0°;90°)$ számközben a változó csökkenő függvénye, így a keresett legnagyobb φ_0 szögre

$$\cos\varphi_0 = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arc\,cos}\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1},$$

ahol a függvény $0°$ és $90°$ közé eső értékét kell venni.

Megjegyzés. A

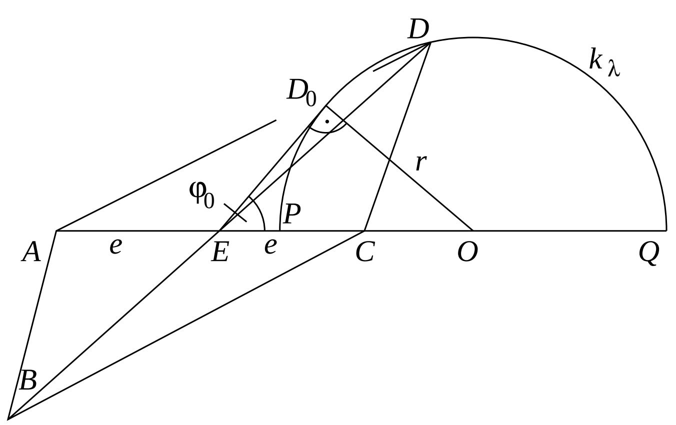
$$\cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)-1}{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)+1}$$

azonosság alapján világos, hogy az eredmény megegyezik az előző megoldásban nyerttel.

III. megoldás. Az AC átlót rögzítve azok a D pontok, amelyekre az AD/CD arány egy rögzített (1-nél nagyobb) λ érték, egy kört alkotnak, az AC szakaszhoz és λ arányhoz tartozó Apolloniosz-kört. Jelöljük ezt k_λ-val, AC felezőpontját E-vel, k_λ középpontját O-val.

Az AC és ED átlók közti szög akkor a legnagyobb, ha D az E pontból a k körhöz húzott érintő D_0 érintési pontja. Jelöljük ezt a legnagyobb szöget φ_0-val, k_λ-nak az AC-re eső átellenes pontjait P-vel és Q-val, az AC szakasz felét e-vel (*3. ábra*). P és Q ezt a szakaszt belülről, illetőleg kívülről $\lambda:1$ arányban osztó pont, így

$$\lambda = \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QC}.$$



3. ábra

A szereplő szakaszokat e-vel fejezve ki a két törtben

(1) $$\lambda = \frac{e+EP}{e-EP} = \frac{EQ+e}{EQ-e}.$$

A második egyenlőségből a törtek eltávolítása és rendezés után az

(2) $$e^2 = EP\cdot EQ$$

egyenlőséget kapjuk. (1)-ből

$$EP = \frac{(\lambda-1)e}{\lambda+1}, \qquad EQ = \frac{(\lambda+1)e}{\lambda-1}.$$

A (2) egyenlőség jobb oldalán álló szorzat az E pontnak a k_λ körre vonatkozó hatványa, így az egyenlőség azt jelenti, hogy az E pontból a k_λ körhöz húzott érintő hossza $ED_0 = e$. A φ_0 szög meghatározásakor az OED_0 háromszög OD_0 oldalát, vagyis a k_λ kör r sugarát fejezzük ki e-vel és λ-val.

$$r = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}(EQ-EP) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} - \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)e = \frac{2\lambda e}{\lambda^2-1}.$$

Az EOD_0 derékszögű háromszögből tehát

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{r}{e} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arc\ tg} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1},$$

ahol a 0° és 90° közé eső értékeket kell venni.

Megjegyzések. 1. Az előző megoldásokkal való kapcsolat könnyen adódik például a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

összefüggésből.

2. Az $ED_0 = e$ egyenlőség szerint D_0 az AC átmérőjű körön van, így az ACD_0 háromszög derékszögű, vagyis az a paralelogramma, amelyikre az átlók szöge a legnagyobb, a téglalap.

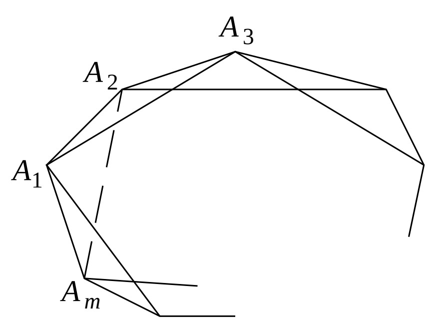
2. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex n-szög átlói közül elhagyunk bárhogyan $n-3$-at, a megmaradók közül mindig kiválasztható $n-3$ úgy, hogy ne messék egymást a sokszög belsejében; viszont el lehet hagyni $n-2$ átlót úgy, hogy ez már ne legyen igaz.*

Megoldás. A feladat állításainak bizonyításához előrebocsátunk néhány megjegyzést. Világos, hogy egy konvex sokszögben addig húzhatunk meg egymást nem metsző átlókat, amíg a sokszöget csupa háromszögre nem bontjuk. (A közös végpontokat a következőkben nem tekintjük metszéspontnak.)

Ismeretes, hogy bárhogyan történik ez a felbontás, konvex n-szögben ehhez $n-3$ átló szükséges, és azok $n-2$ háromszöget hoznak létre. (Lásd pl. Matematikai Versenytételek III., 1985. évi 1. feladat 2. megjegyzés, 295. oldal.)

A feladat két állítás bizonyítását kívánja. Az elsőt teljes indukcióval bizonyítjuk.

Nyilvánvaló az állítás helyessége háromszögekre (0 átló elhagyása után meghúzható 0 egymást nem metsző átló), és négyszögekre is. Legyen a továbbiakban $m \geq 5$, egy konvex m-szög $A_1A_2\ldots A_m$, és tegyük fel, hogy konvex $(m-1)$-szögekre igaz az állítás. Legyen az m-szögben elhagyva tetszés szerint $m-3$ átló.



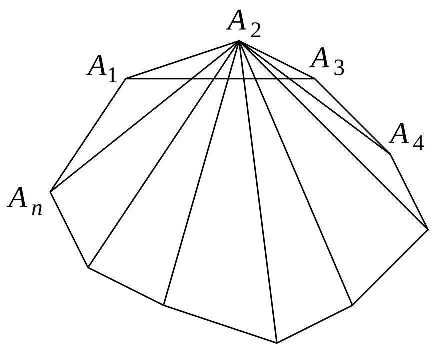
4. ábra

Nézzük a második szomszéd csúcsokat összekötő átlókat, nevezzük ezeket a továbbiakban kis átlóknak. Mivel $m \geq 5$, minden kis átlóhoz egyértelműen tartozik a végpontjai közti, azaz a kis átló által lemetszett csúcs. A kis átlók száma tehát m, s így nincs mindegyik elhagyva. Van köztük olyan, amelyik nincs elhagyva, de az általa levágott csúcsból induló átlók közt van elhagyott. Ez nyilvánvaló, ha az elhagyott átlók közt nincs kis átló.

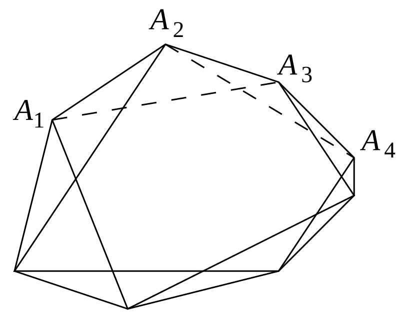
Ha nem ez a helyzet, akkor pl. A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, $A_{m-1}A_1$, A_mA_2 sorrendben végighaladva a kis átlókon találunk el nem hagyottat, amire következő el van hagyva. Válasszuk a számozást úgy, hogy A_2A_m nincs elhagyva, A_1A_3 el van hagyva. Ekkor az $A_2\ldots A_m$ konvex $(m-1)$-szög átlói az eredeti sokszögben is átlók, és közülük legfeljebb $m-4$ van elhagyva, mert az A_1A_3 elhagyott átló az $(m-1)$-szög átlói közt nem szerepel (*4. ábra*). Így az $(m-1)$-szögben meghúzható $m-4$ egymást nem metsző átló az el nem hagyottak közül. Az m-szögben ezekhez hozzávehetjük az A_2A_m átlót, mert ez az $(m-1)$-szögnek oldala, így egyrészt nincs a meghúzott átlók között, másrészt nem metszi azokat. Az állítás helyessége tehát öröklődik az m-szögre is, így minden konvex sokszögre igaz.

A második állítás igazolására megadunk egy $A_1A_2\ldots A_n$ konvex n-szögben $n-2$ átlót úgy, hogy azok elhagyása után ne lehessen a maradók közül $n-3$ nem metszőt kiválasztani. Erre több lehetőség is kínálkozik.

1. Hagyjuk el az A_2-ből induló átlókat és A_1A_3-at (*5. ábra*). A maradó átlók éppen az $A_1A_3\ldots A_n$ $(n-1)$-szög átlói. Ezek közül kellene $n-3$ egymást nem metszőt kiválasztani. Láttuk azonban, hogy ebből csak $n-1-3 = n-4$ nem metsző átló választható ki. Ezzel igazoltuk a második állítást.

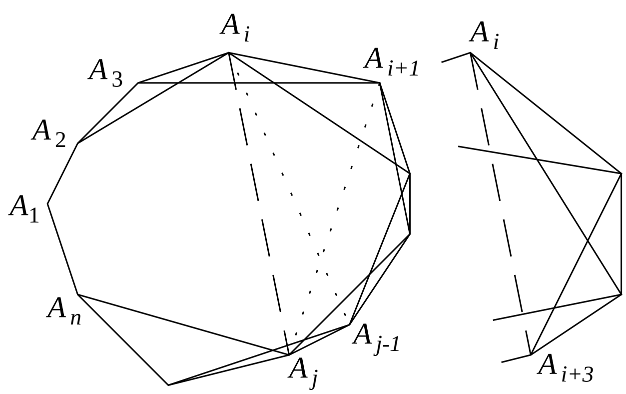


5. ábra



6. ábra

2. A második állítás igazolására alkalmas az is, ha a kis átlókat hagyjuk el az A_1A_3 és az A_2A_4 kivételével (*6. ábra*). Ismeretes ugyanis, hogy egy konvex n-szögben tetszés szerinti $n-3$ nem metsző átló közt mindig van legalább két kis átló. (A korábban idézett helyen a 3. megjegyzés c) pontja, 295. oldal.) A leírt elhagyás mellett azonban csak két meghúzható kis átló van, de azok metszik egymást. Ezzel újabb bizonyítást adtunk a második állításra.



7. ábra

Megjegyzések. 1. A versenyzők a fentiekben idézett segédtételek közül azokat, amelyeket felhasználtak, be is bizonyították.

2. Az első állításnál négyszög esetén bármelyik átlót hagyjuk el, a másikat kell kiválasztanunk. Megadunk $n \geq 5$-re is $n-3$ átlót úgy, hogy azok elhagyása esetén csak egyféleképpen lehessen $n-3$ nem metsző átlót kiválasztani. Ehhez ötletet ad a 2. állítás igazolására adott 2. ellenpélda és annak igazolása.

Hagyjuk el az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszögből a kis átlókat, kivéve az $A_{n-1}A_1$, az A_nA_2 és az A_1A_3 átlót. Ekkor egyedül az A_1 csúcsból induló átlók kiválasztása ad megoldást. Állításunk igazolására megmutatjuk, hogy semelyik A_iA_j átló sem szerepelhet a kiválasztottak közt, ha $2 \leq i < j \leq n$ (*7. ábra*). Mivel átlóról van szó, és az A_iA_{i+2} átló el van hagyva, így $A_i \dots A_j$ legalább 4-oldalú konvex sokszög, és ebben legfeljebb az A_iA_{j-1} és $A_{i+1}A_j$ kis átló nincs elhagyva, ezek azonban metszik egymást. ($j = i+3$ esetén ezek is elhagyott átlók.) Ezzel igazoltuk az állítást.

3. *Adottak a H_1, H_2, ..., H_n halmazok. A H_k halmaz ($k = 1, 2, \dots, n$) a valós számegyenes k darab olyan intervallumából áll, amelyeknek páronként nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy a fenti H_k halmazokat alkotó intervallumok közül kiválasztható $[(n+1)/2]$ olyan intervallum, amelyek mindegyike más-más H_k halmazhoz tartozik, és semelyik kettőnek nincs közös pontja.* ($[x]$ a legnagyobb egész szám, amelyik kisebb az x-nél vagy egyenlő vele.)

Megoldás. A következő állítást fogjuk bizonyítani:

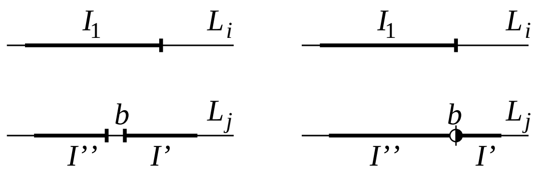
Ha az L_1, L_2, ..., L_m halmaz mindegyike a számegyenes legalább m (de véges számú) páronként közös elem nélküli intervallumából áll, akkor kiválasztható mindegyik halmazból egy-egy intervallum úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja.

Ez tartalmazza a feladat állítását. Ehhez csak $n = 2m - 1$ és $n = 2m$ esetén a H_m, H_{m+1}, $\ldots$, H_{2m-1} halmazokra kell alkalmazni a kimondott tételt.

Az állítás igaz, ha $m = 1$. Ha $m > 1$, eljárást adunk meg az intervallumok egymás utáni kiválasztására. Vegyük mindegyik halmaz balról első intervallumának a jobb végpontját és azt vagy azokat az intervallumokat, amelyekre ez a legkisebb. Több intervallum esetén válasszunk ki egy jobbról nyitottat, ha van ilyen, különben tetszés szerint egyet. Legyen ez I_1, és tartozzék az L_i halmazhoz. Ezután hagyjuk el L_i-t, a többi halmazból pedig a balról első intervallumot, majd ismételjük az eljárást, amíg el nem fogynak a halmazok.

Az első lépés után $m - 1$ halmaz marad, mindegyik legalább $m - 1$ páronként közös pont nélküli intervallumból áll. Azt kell még belátnunk, hogy I_1-nek a megmaradt intervallumok egyikével sincs közös pontja. Ezzel egyenértékű az, hogy ha I_1-nek az eredeti L_j halmaz I' intervallumával van közös pontja, ahol $j \neq i$, akkor I' az L_j balról első intervalluma.

Jelöljük I' bal végpontját b-vel, és tegyük fel, hogy van L_j-ben egy I'-től balra levő I'' intervallum. Ha b kisebb I_1 jobb végpontjánál, akkor ez még inkább igaz I'' jobb végpontjára (*8.a ábra*; a halmazokat párhuzamosan eltolt egyeneseken szemléltetjük), így nem I_1-et kellett volna kiválasztanunk.

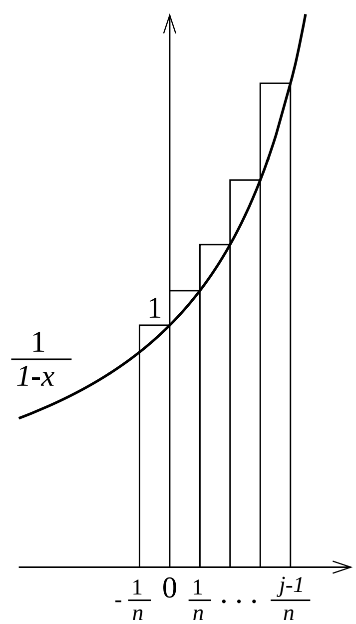


8. ábra

Ha b egyenlő I_1 jobb végpontjával, akkor kell, hogy I' balról, I_1 jobbról zárt legyen. Ekkor I'' jobb végpontja vagy kisebb b-nél, vagy egyenlő vele, de az utóbbi esetben az intervallum nyitott, mert nincs közös pontja I'-vel (*8.b ábra*). Ismét egyik esetben sem I_1-et kellett volna kiválasztani eljárásunk szerint. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ezek alapján az eljárást m-szer megismételve az összes követelményt kielégítő intervallumhalmazt kapunk.

Megjegyzés. Többen tettek kísérletet annak bizonyítására, hogy a feladat állításában az $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ korlát nem javítható, de ezek hibásak. Az $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ élességét csupán $n \le 6$-ra sikerült eddig belátni. Annyit azonban meg lehet mutatni, hogy van olyan halmazrendszer, amelyikből csak $\left(1 - \frac{1}{e}\right)(n+1)$-nél kevesebb intervallum választható ki a feladat követelményeinek megfelelően.



9. ábra

Álljon $k = 1, 2, \ldots, n$-re H_k a

$$(0, 1/k),\ (1/k, 2/k),\ \ldots,\ ((k-1)/k, 1)$$

nyitott intervallumokból. Legyen a kívánalmaknak megfelelően kiválasztható intervallumok maximális száma j. A kiválasztott intervallumok hosszának az összege nem lehet 1-nél nagyobb. Ha minden lépésben kiválaszthatunk egyet a megmaradt legrövidebb intervallumok közül, ez az összeg akkor is legalább

$$S = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-j+1} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{1-1/n} + \frac{1}{1-2/n} + \cdots + \frac{1}{1-(j-1)/n}\right).$$

Integrálva $\dfrac{1}{1-x}$-et $-\dfrac{1}{n}$-től $\dfrac{j-1}{n}$-ig, S tekinthető az integrál egy felső közelítő összegének (*9. ábra*), s így az integrálnak 1-nél kisebbnek kell lennie, azaz

$$\log\left(\frac{n+1}{n-j+1}\right) < 1, \qquad\qquad j < \left(1 - \frac{1}{e}\right)(n+1).$$

Ez tehát felső korlát a kiválasztható intervallumok számára. A nyert konstans:

$$1 - \frac{1}{e} = 0{,}63212\ldots$$

A megjegyzés Surányi Lászlótól származik.