Jelölje $e(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ azt az egységnyi abszolút értékű komplex számot, amelynek argumentuma $2\pi t$. Legyen

$$f(\alpha,\beta) = \left| \sum_{x=1}^{10} e\left(\alpha(0{,}5x^2 - 5{,}5x) + \beta x\right) \right|.$$

A címlapon az $f(\alpha,\beta)$ függvény grafikonját ábrázoltuk a $-0{,}5 \le \alpha,\beta \le 0{,}5$ négyzetben. Ahol a függvény értéke nagyobb, ott a színezés sötétebb.

Az ehhez hasonló összegeknek nagy jelentősége van az additív számelméletben. Jól használhatók bizonyos diofantikus egyenletrendszerek megoldásszámának becslésében, de a zeta-függvény gyökeinek vizsgálatában is hasznosak.

Ha például arra vagyunk kiváncsiak, hogy az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n;$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

egyenletrendszernek hány megoldása van a 10-nél nem nagyobb pozitív egészek körében, akkor az f függvény $2n$-edik hatványának integrálja előállítja a keresett megoldásszámot:

$$\int_{-0{,}5}^{0{,}5} \int_{-0{,}5}^{0{,}5} |f(\alpha,\beta)|^{2n} d\alpha d\beta.$$

Ha n nagy, akkor az integrál lényeges része a négyzet közepén van, ahol f nagy. A $2n$-edik hatványra emelés méginkább kiemeli ezt a különbséget. A négyzet többi részén az integrál viszonylag kicsi.

Ezzel a módszerrel be lehet bizonyítani, hogy a megoldások száma aszimptotikusan

$$\frac{5}{2178\pi} \cdot \frac{10^{2n}}{n}.$$

Az **F. 3036.** feladatban (KöMaL, 1994/8–9) az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 0; \quad x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{10}^3 = 0$$

és az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 1; \quad x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{10}^3 = 1$$

egyenletrendszerek megoldásainak számát kellett összehasonlítani az 1000-nél nem nagyobb abszolút értékű egészek körében. A két megoldásszám felírható az előbbihez hasonló integrálalakban:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{x=-1000}^{1000} e(\alpha x + \beta x^3) \right)^{10} d\alpha d\beta,$$

illetve

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{x=-1000}^{1000} e(\alpha x + \beta x^3) \right)^{10} e(-\alpha - \beta) d\alpha d\beta.$$

A zárójelben álló szám mindig valós, tehát az első integrálban pozitív mennyiséget integrálunk. A második esetben ungyanennek a pozitív mennyiségnek elforgatottjait integráljuk, ezért az eredményül kapott szám csak kisebb lehet. (Már az is érdekes, hogy egyáltalán valós.) Az első egyenletrendszernek tehát több megoldása van, mint a másodiknak.

A feladat természetesen elemi úton is megoldható.

Kós Géza