1. Az első egyenletből $\dfrac{xy}{x+2y}=1$, a másodikból $\dfrac{xy}{x-y}=4$ vagy $\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{1}{4}$ és $x+2y\neq 0$, $xy\neq 0$, $x-y\neq 0$. Ha $xy=x+2y$ és $xy=4(x-y)$, akkor $x_1=4$, $y_1=2$, ha $xy=x+2y$ és $4xy=x-y$, akkor $x_2=-1$, $y_2=\dfrac{1}{3}$.

2. A két kör középpontja és az egyik közös pontja olyan háromszöget határoz meg, amelynek 44 egység hosszú oldalához tartozó magassága a közös húr hosszának a fele. A szóban forgó háromszög három oldala 17, 39 és 44 egység, így kerülete $2s=17+39+44=100$ egység, $s=50$ egység, így területe egyrészt

$$t=\sqrt{50\cdot 6\cdot 11\cdot 33}=5\cdot 2\cdot 3\cdot 11 \text{ területegység},$$

másrészt

$$t=\frac{44\cdot m}{2},$$

tehát $2m\cdot 11=30\cdot 11$. A közös húr hossza $2m=30$ egység.

3. Ha a havi törlesztő összeg t forint, akkor

$$12\,000\cdot 1{,}02^{12}-t\cdot\frac{1{,}02^{12}-1}{1{,}02-1}=0,$$

ahonnan

$$t=\frac{12\,000\cdot 1{,}02^{12}\cdot 0{,}02}{1{,}02^{12}-1}\approx 1134{,}72\ \text{Ft}.$$

A havi törlesztő összeg 1135 Ft.

4. a) A $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ egyenlet ekvivalens az $a+b=a+2\sqrt{ab}+b$ egyenlettel, ha $a\geq 0$ és $b\geq 0$. Így $a=0$, $b\geq 0$ vagy $a\geq 0$, $b=0$ a megoldások.

b) Mivel $(x^2-4)+(6-2x)=x^2-2x+2$, azért az előzőket alkalmazva az egyenlet megoldásai: $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$.

5. a)

$$\begin{aligned} a^3-3a^2b-ab^2+3b^3&=a^2(a-3b)-b^2(a-3b)=\\ &=(a^2-b^2)(a-3b)=(a-b)(a+b)(a-3b).\end{aligned}$$

b$_1$) Az előzőt alkalmazva ($3^x=a$, $2^x=b$), $(3^x-2^x)(3^x+2^x)(3^x-3\cdot 2^x)=0$, $x_1=0$, $x_2=\log_{\frac{3}{2}}3$.

b$_2$) $(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)(\sin x-3\cos x)=0$
$x_{1,k}=45^\circ+k\cdot 180^\circ$, $x_{2,k}=135^\circ+k\cdot 180^\circ$, $x_{3,k}=71{,}57^\circ+k\cdot 180^\circ$, $k\in\mathbf{Z}$.

6. Az adott két egyenes párhuzamos, távolságuk a keresett kör átmérője. Most $2r=4\sqrt{5}$, $r=2\sqrt{5}$. A keresett kör középpontja rajta van a két egyenes középpárhuzamos egyenesén, amelynek egyenlete $y=2x+4$. A keresett kör érinti az x-tengelyt, így ha középpontja $C(u;v)$, akkor egyrészt $v=2u+4$, másrészt $r^2=v^2$ miatt $v^2=20$, ezért $u_1=\sqrt{5}-2$, $v_1=2\sqrt{5}$, illetve $u_2=-\sqrt{5}-2$, $v=-2\sqrt{5}$. A keresett körök egyenlete:

$$(x+2-\sqrt{5})^2+(y-2\sqrt{5})^2=20,\qquad \text{illetve}\qquad (x+2+\sqrt{5})^2+(y+2\sqrt{5})^2=20.$$

7. A hatszög két *szomszédos* oldala $AB=2$, $BC=x$ egység ($x\neq 2$). Az $AOC\sphericalangle=120^\circ$, ahol O a kör középpontja. A rövidebb AC ívhez tartozó középponti szög tehát 120°, a hozzá tartozó kerületi szög 60°, így $ABC\sphericalangle=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. Az AOC háromszögben $AC=2\cdot\sqrt{13}\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{39}$ egység. Az ABC háromszögben alkalmazhatjuk a koszinusztételt:

$$\begin{gathered}39=x^2+4-2\cdot 2x\cdot\cos 120^\circ,\\ x^2+2x-35=0.\end{gathered}$$

Mivel $x>0$, azért $x=5$. A hiányzó három oldal hossza 5 egység.

8. A feltételek: $a_1+a_2=p$, $\dfrac{a_2}{a_1}=q$, tehát $a_1\neq 0$ és $2a_1+d=p$ és $a_1+d=a_1q$, azaz:

$$2a_1+d=p, a_1(1-q)+d=0.\}$$

Vonjuk ki az előbbi egyenletből az utóbbit: $a_1(1+q)=p$.

Ha $q=-1$ és $p\neq 0$, akkor nincs megoldás; ha $q=-1$ és $p=0$, akkor $a_1\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $d=-2a_1$, $a_3=-3a_1$; végül ha $q\neq -1$, akkor $p\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $a_1=\dfrac{p}{q+1}$, $d=\dfrac{p(q-1)}{q+1}$ és $a_3=\dfrac{2pq-p}{q+1}$.

Rábai Imre