

1. Az ABC háromszögben $AC = 26$ egység, az AA_1 , illetve a CC_1 súlyvonal hossza 36 , illetve 15 egység. Számítsa ki a háromszög területét és a BB_1 súlyvonal hosszát.

2. Legyen – a szokott jelölés szerint – egy háromszög három oldala a , b és c , az oldalakkal szemközti szögek rendre α , β , γ . Igazolja, hogy a háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha

$$ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ca \cos \beta = d^2,$$

ahol d az a , b , illetve c oldalak közül valamelyikkel egyenlő.

2

3. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1$; b) $\frac{\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x}{\cos^2 x} > \sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1)$.

4. Egy mértani sorozat második és hatodik elemének szorzata 1 , a harmadik és az ötödik elem különbsége $\frac{3}{2}$. Számítsa ki a sorozat első elemét és hányadosát.

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_2(x+1) + \frac{1}{2} \log_2(x^2 - 8x + 16) = 1 + \log_2 3$$

egyenletet.

6. Melyek a síknak azok a pontjai, amelyekből az $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$ és az $x^2 + (y-1)^2 = 16$ egyenletű körökhöz egyaránt 7 egység hosszú érintőszakaszok húzhatók?

7. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$2 \sin^2 \frac{y+x^2}{4} = 3^x + 3^{-x}$$

egyenletet.

8. Bizonyítsa be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

a) 16 osztója az $5^n(4n-1)+1$,

b) 6000 osztója a $(252^n - 2^n)(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n)$

kifejezésnek.

Rábai Imre