

Ha $n = 1$, (2) a

$$2(u + v + w) + a_1(u + v + w) = 0$$

azonosságot jelenti, amiből például $u = v = w = 1$ mellett $a_1 = -2$ következik, vagyis $P(x, y) = x - 2y$. A továbbiakban feltesszük, hogy $n > 1$.

Legyen a tetszőleges valós szám, és helyettesítsük (2)-be az $u = a$, $v = a$, $w = 1 - 2a$ értékeket:

$$P(2a, 1 - 2a) + 2P(1 - a, a) = 0.$$

Eszerint a

$$(3) \quad Q(z) = P(1 - z, z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

polinomra

$$Q(1 - 2a) + 2Q(a) = 0$$

teljesül tetszőleges a mellett, vagyis az

$$R(z) = Q(1 - 2z) + 2Q(z)$$

polinom értéke minden $z = a$ mellett 0. Ez csak úgy lehet, ha az $R(z)$ polinom minden együtthatója 0-val egyenlő. Ha Q -ban a legmagasabb fokú, 0-tól különböző együtthatójú tag $b_k z^k$ ($0 \leq k \leq n$), akkor R -ben a legmagasabb fokú tag $[(-2)^k + 2] b_k z^k$, ami csak $k = 1$ mellett egyenlő 0-val. Ekkor $Q(z) = b_1 z + b_0$, és $R(z) = b_1 + 3b_0$, tehát $b_1 = -3b_0$, és

$$(4) \quad Q(z) = b_0(1 - 3z).$$

(1) szerint tetszőleges olyan (a, b) számpárra, amelyre $a + b \neq 0$

$$P(a, b) = (a + b)^n P\left(\frac{a}{a + b}, \frac{b}{a + b}\right),$$

amiből (3) és (4) alapján

$$(5) \quad P(a, b) = (a + b)^n Q\left(\frac{b}{a + b}\right) = (a + b)^n b_0 \left(1 - \frac{3b}{a + b}\right) = b_0(a + b)^{n-1}(a - 2b)$$

következik. Ha $b = -a \neq 0$, helyettesítsük (2)-be az

$$u = \frac{a}{2}, \quad v = \frac{a}{2}, \quad w = -a$$

értékeket, így azt kapjuk, hogy

$$P(a, -a) + 2P\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Itt ismét (1) alapján $P(a, -a) = a^n P(1, -1)$, $P(-a/2, a/2) = (-a/2)^n \cdot P(1, -1)$, tehát

$$\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] a^n P(1, -1) = 0,$$

amiből $n > 1$, $a \neq 0$ miatt $P(1, -1) = 0$ következik. Tehát (5) olyan (a, b) számpárra is igaz, melyben $b = -a \neq 0$, és nyilvánvalóan igaz (5) az $a = b = 0$ számpárra is. Ezzel beláttuk, hogy (2) csak olyan $P(x, y)$ polinomra teljesülhet, amelyre teljesül (5). Ennek megfordítása behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető: ha a $P(x, y)$ polinomra teljesül (5), akkor nyilván teljesül rá (2) is. (5) szerint $P(1, 0) = b_0$, így $P(1, 0) = 1$ miatt a keresett polinom

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y).$$

Ebből binomiális tétellel már könnyen megkaphatjuk P együtthatóit: $a_k = \binom{n-1}{k} - 2\binom{n-1}{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, a bevezetőben külön tárgyalt $n = 1$ esetre is érvényes.

Megjegyzés. A megoldás elején felhasználtuk, hogy az $P(z)$ polinom értéke csak akkor lehet minden $z = a$ mellett 0, ha a polinom minden együtthatója 0. Ez a polinomok gyöktényezőzős alakja miatt van így: ha a $p(x)$ polinomnak x_1, x_2, \dots, x_k gyöke, akkor van olyan $q(x)$ polinom, hogy

$$p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k)q(x),$$

ami viszont abból következik, hogy $p(x) - p(a)$ tetszőleges a mellett osztható $(x - a)$ -val. Így egy n -edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet, tehát ha egy legfeljebb n -edfokú polinomnak $n + 1$ különböző helyen 0 az értéke, a polinom minden együtthatója 0.

Ennek az állításnak a kétváltozós megfelelőjét használtuk fel a megoldás végén, amikor abból, hogy (5) minden (a, b) mellett igaz, arra következtettünk, hogy (5) megadja a keresett polinom alakját. Általában, ha a $P(x, y)$, $Q(x, y)$ polinomok értéke minden (a, b) mellett egyenlő, akkor tetszőleges b mellett a $P(x, b)$, $Q(x, b)$ polinomokra alkalmazhatjuk a fenti állítást, és mivel a polinomok együtthatói egy-egy újabb polinom b helyen felvett értékei, kapjuk, hogy P és Q együtthatói is egyenlőek.