Mivel $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,

$$P(x) = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + a - \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Itt az első tag nem negatív, és lehet 0 is, például $x = -\dfrac{\pi}{4}$ mellett, tehát $P(x)$ akkor és csakis akkor lesz nem negatív minden x-re, ha $a - \dfrac{b}{\sqrt{2}} \geqq 0$, ami $b > 0$ mellett ekvivalens az

(1) $$\frac{a}{b} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

feltétellel.

Jelöljük az $\dfrac{a}{b}$ hányados értékét c-vel. Mivel $\dfrac{b+a}{b-a} = \dfrac{1+c}{1-c}$ és feltevésünk szerint $\dfrac{a}{b} < 1$, (1) alapján azt kell megvizsgálnunk, mi a

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq c < 1$$

szakaszon értelmezett

$$Q(c) = \frac{1+c}{1-c} = \frac{2}{1-c} - 1$$

függvény értékkészlete. Ha c befutja a (2) szakaszt, $1-c$ a

$$0 < 1 - c \leqq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

szakaszt járja be, reciproka pedig az $1\bigg/\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \sqrt{2}$-nél nem kisebb számokat. Tehát $Q(c)$ értékkészlete és így a $\dfrac{b+a}{b-a}$ hányados lehetséges értékeinek a halmaza is a $(3 + 2\sqrt{2})$-nél nem kisebb számokból áll.

Tóth Csaba (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)