Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1993. október 15-én tartotta 70. Eötvös versenyét Budapesten és 11 vidéki városban az abban az évben érettségizettek és a középiskolai tanulók részére. A versenyzők – bármilyen segédeszköz felhasználásával – 5 órai munkaidő alatt három fizikai feladatot oldhattak meg. A versenyben 271 tanuló adott be értékelhető dolgozatot. Ismertetjük a feladatokat, azok megoldását és a verseny eredményét.

1. Egyik végén átmenő, vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat egy hosszú vasrúd. A rúd másik vége a rúd hossztengelyére merőleges sík.

A rudat közel függőleges helyzetbe hozzuk, a felső végére kicsiny mágneskorongot illesztünk, majd elengedjük őket.

A korongra ható nehézségi erőnek legalább hányszorosa kell legyen a korong és a rúd között fellépő mágneses vonzerő, hogy a mozgás során a korong ne mozduljon el a rúdhoz képest?

A tapadási súrlódási együttható $\mu_0 = 1/6$.

(*Varga István*)

Megoldás. A feladat megoldásához a korongra és a rúdra felírt mozgásegyenleteket, valamint a munkatételt fogjuk felhasználni, miközben figyelembe vesszük a korong mozgására kirótt megkötéseket.

A *2. ábrán* a korongra ható erőket tüntettük fel: $\vec{N}$ az érintkezési felületre merőleges nyomóerő, $m\vec{g}$ a nehézségi erő, $\vec{S}$ a súrlódási erő, $\vec{F}$ pedig a rúdirányú mágneses vonzóerő.

A korong mozgásegyenletei:

$$S + mg\sin\alpha = ma_t,$$

$$F + mg\cos\alpha - N = ma_c,$$

ahol $a_t = l\beta$ az érintőleges (tangenciális) gyorsulás $a_c = l\omega^2$ a korong sugárirányú (centripetális) gyorsulása, l pedig a rúd hosszát jelöli.

A rendszer β szöggyorsulását és ω szögsebességét a forgómozgás dinamikai alapegyenletéből, illetve a munkatételből kaphatjuk meg. Tekintettel arra, hogy a *kicsiny* mágnes m tömege elhanyagolható a rúd M tömegéhez képest, elegendő a rúdra vonatkozó összefüggéseket felírni:

$$Mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{3}ML^2\beta, \text{ tehát } \beta = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega^2 = Mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha\right),$$

innen

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\alpha).$$

Ezekből az egyenletekből adódik, hogy

$$N = F + mg(4\cos\alpha - 3),$$

$$S = \frac{1}{2}mg\sin\alpha.$$

A korong akkor nem mozdul el a rúdhoz képest, ha

a) nem válik el a rúdtól; ennek feltétele: $N > 0$;

b) nem csúszik meg; ennek feltétele: $|S| \le \nu_0 N$

Az a) feltétel teljesül, ha

$$F > mg(3 - 4\cos\alpha) \ge 7mg.$$

Az egyenlőség $\alpha = \pi$-nél, vagyis a függőlegesen lefelé mutató rúdnál áll fenn.

A b) feltétel szerint $\nu_0 N = N/6 \ge S$, ami S és N korábban kiszámított kifejezéseinek felhasználásával

$$\frac{F}{mg} \ge 3 + (3\sin\alpha - 4\cos\alpha)$$

alakra hozható. A jobb oldalon a zárójelben álló kifejezés nem lehet nagyobb 5-nél és a maximális értéket $\mathrm{tg}\alpha_0 = -4/3$, azaz $\alpha = \alpha_0 \approx 143°$-nál éri el. Ezt az állítást a differenciálszámítás képletei segítségével, vagy a

$$3\sin\alpha - 4\cos\alpha = 5\left(\frac{3}{5}\sin\alpha - \frac{4}{5}\cos\alpha\right) =$$

$$= 5(\sin\alpha_0\sin\alpha + \cos\alpha_0\cos\alpha) = 5\cos(\alpha - \alpha_0) \le 5$$

trigonometrikus átalakítás felhasználásával, esetleg elemi geometriai módszerrel (lásd a *3. ábrát*) láthatjuk be. A korong tehát akkor nem csúszik meg a rúdon, ha

$$F \geq 8mg.$$

Látható, hogy a b)feltétel, vagyis a megcsúszást tiltó egyenlőtlenség az erősebb. Összefoglalva: a korong biztosan nem mozdul el a rúdhoz képes, ha a mágneses vonzóerő a korongra ható nehézségi erőnek *legalább nyolcszorosa.*

2. U alakú üvegcső mindkét szára 76 cm magas. A bal oldali szár zárt, a jobb oldali nyitott. A csőben higany helyezkedik el, a *4. ábrán* látható módon. A higany egyensúlyban van, mert a bal oldali szárban a higany fölött egy kis levegő is van. A hőmérséklet 300 K, a külső légnyomás 76 Hgcm.

Lezárjuk a jobb oldali szárat, az egész berendezést 450 K-re melegítjük, majd visszahűtjük 300 K-re.

Ezek után hogyan fog elhelyezkedni a higany?

Károlyházy Frigyes

Megoldás. A jobb oldali szár lezárásakor a jobb oldali szárban a levegő nyomása $p_1 = 76Hgcm$, az üvegcső alján tehát 79 Hgcm a higany nyomása, a bal oldali szárban levő levegő nyomása pedig $p_2 = 79Hgcm - 70Hgcm = 9Hgcm$. A rendszert melegítve mindkét szárban levő levegő nyomása megnő. Ha valamilyen ok miatt a higany nem tudna elmozdulni, akkor a gáznyomások növekedése (izochor folyamatban) az eredeti nyomással egyenes arányban állna. Mivel $p_1 > p_2$, a bal oldali szárban a nyomás növekedése nagyobb lenne, mint a jobb oldaliban, tehát a higany (amely természetesen el tud mozdulni), a melegítés során a jobb oldali szárban lesüllyed, a bal oldaliban pedig felemelkedik.

Amennyiben a higanyszint a jobb oldali szárban annyira lesüllyed, hogy eléri a kanyarulatot, akkor a további melegítés hatására a levegő egy része „átbugyborékol" a bal oldali szárba. (A *4. ábra* szerint a higany felszíne majdnem sík. Ez arra utal, hogy az üvegcső nem tekinthető kapillárisnak, a levegő nem képes a kanyarulatban is maga előtt „tolni" a higanyszálat.)

Elvileg két lehetőség képzelhető el: a) Ha a rendszert „elegendően" felmelegítjük, az átbugyborékolás biztosan bekövetkezik. Ilyenkor a berendezés visszahűtése után a bal oldali szárban több levegő lesz, mint kezdetben volt, tehát az eredeti hőmérsékleten a bal oldali levegőoszlop 6 cm-nél hosszabb lesz.

b) Ha a berendezést nem melegítjük fel annyira, hogy levegő bugyborékoljon át a kanyarulaton, akkor a visszahűtés után a rendszer minden részének valamennyi állapotjelzője megegyezik a kezdeti értékekkel, tehát a higany ugyanúgy fog elhelyezkedni, mint eredetileg.

A két lehetőség között a konkrét adatokkal elvégzett számolás dönt. Ha a levegő hőtágulását figyelembe vesszük, de az üvegnek és a higanynak a gázokhoz képest jóval kisebb hőtágulását elhanyagoljuk, akkor az adódik, hogy a 450 K-re való felmelegítés elegendő ahhoz, hogy levegő bugyborékoljon át a bal oldali szárba. A gáztörvényeket, illetve a higany egyensúlyi feltételét felírva azt kapjuk, hogy a jobb oldali higanyszint $T = 398,2K$ hőmérsékletnél eléri a kanyarulatot, bizonyos mennyiségű levegő átbugyborékol, majd a visszahűtés után a higanyszint a jobb oldalon az eredeti állapothoz képest 6,8 mm-rel magasabbra kerül.

Ha a higany és az üvegcső hőtágulását is figyelembe vesszük, akkor (a táblázatbeli hőtágulási együtthatókkal) az adódik, hogy a melegítés során a jobb oldali higanyszint csak 22 mm-t süllyed, tehát *nem éri el* a kanyarulatot! A rendszer lehűtése után tehát minden tekintetben visszaáll a kezdőállapot, a higanyszintek pontosan ott fognak megállapodni, ahol a felmelegítés előtt voltak.

(A Versenybizottság – kellő indoklás esetén – mindkét megoldást elfogadta.)

3. m tömegű, Q elektromos töltésű kicsiny gömböt fonálra függesztünk. Az így kapott ingát homogén, függőleges irányú, B indukciójú mágneses térbe helyezzük. Ha a gömböt kissé meglökjük, lengésbe jön. Azt tapasztaljuk, hogy a lengés síkja lassan körbefordul.

Becsüljük meg, hogy mennyi idő alatt tesz meg a lengés síkja egy teljes fordulatot!

Tichy Géza

Megoldás. A nyugalmi helyzetétől mért $\vec{r}$ helyen lévő, $\vec{v}$ sebességgel mozgó gömbre a fonálerő, a nehézségi erő és a mágneses tér okozta *Lorentz-erő* hat. Kicsiny kitérítés esetén a mozgás jó közelítéssel síkmozgásnak tekinthető. Az ingamozgásnál szokásos közelítéseket alkalmazva a fonálerőnek a mozgás (vízszintes) síkjába eső vetülete $-m\omega^2\vec{r}$, ahol ω a fonálinga mágneses mező nélküli körfrekvenciája $\left(\omega = \sqrt{g/l}\right)$. A gömb mozgásegyenlete a mágneses mező jelenlétében:

$$m\vec{a} = Q\vec{v} \times \vec{B} - m\vec{r}\omega^2. \tag{1}$$

Ez az egyenlet az $\vec{r}$-re vonatkozó differenciálegyenlet, pontosabban: az $\vec{r}$ vektor derékszögű komponensei között fennálló csatolt differenciálegyenlet-rendszer, melynek általános megoldása felsőbb matematikai ismereteket igényel.

A feladatot középiskolai szinten (tehát a differenciálegyenleteket matematikai elméletére való hivatkozás nélkül) is meg lehet oldani, ha felismerjük az (1) egyenlet és a közönséges síkinga forgó koordináta-rendszerből történő leírása (*Foucault-inga*, az Északi sarkon) közötti hasonlóságot. Ha egy ω_0 körfrekvenciával jellemezhető síkinga kis amplitúdójú lengéseit egy olyan koordináta-rendszerből akarjuk leírni, amely $\vec{\Omega}$ szögsebességgel forog az inerciarendszerhez képest

($\vec{\Omega}$ függőleges vektor), akkor a következő (a *Coriolis-erőt* és a centrifugális erőt is figyelembe vevő) mozgásegyenletet kell tanulmányoznunk.

$$m\vec{a} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} - m\vec{r}\omega_0^2 + m\vec{r}\Omega^2. \tag{2}$$

Ennek az egyenletnek a megoldását azonban ismerjük: mivel a lengés síkja az inerciarendszerben állandó, a forgó koordináta-rendszerhez képest $\vec{\Omega}$ szögsebességgel forog, tehát $T = 2\pi/\Omega$ idő alatt tesz meg egy teljes fordulatot. Az (1) és (2) egyenleteket összehasonlítva láthatjuk, hogy $\vec{\Omega} = Q\vec{B}/(2m)$. ($\omega_0$ is kifejezhető a feladat többi paraméterével,)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \left(\frac{QB}{2m}\right)^2},$$

de ez számunkra most érdektelen.) A lengési sík tehát a mágneses mező hatására

$$T = 4\pi\frac{m}{QB}$$

idő alatt fordul teljesen körbe. (Érdekes, hogy a körülfordulás ideje csupán a kis gömb adataitól és a mágneses mező erősségétől függ, az inga lengési periódusidejétől viszont nem.)

Ha nem törekszünk ennyire pontos eredményre, hanem csak becslést akarunk adni a körülfordulás idejére (a feladat szövege is csak ezt igényli!), akkor elegendő a probléma közelítő megoldását megadni. A továbbiakban erre látunk három különböző példát.

Első közelítésként tételezzük fel, hogy az x tengely irányában v_0 sebességgel meglökött gömb (*5. ábra*) v_x sebessége egy negyed lengési periódus, $\tau = T_{leng}/4$ idő alatt egyenletesen lassulva, az idő lineáris függvénye szerint változva csökken zérusra:

$$v_x(t) = v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Ekkor a kezdősebességre merőleges (y irányú) gyorsulás is lineáris függvény

$$a_y(t) = \frac{Qv_0B}{m}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

a megfelelő sebesség és elmozdulás pedig (a hatványfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályokat alkalmazva):

$$v_y(t) = \frac{Qv_0B}{m}\left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right),$$

$$y(t) = \frac{Qv_0B}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\tau}\right).$$

A maximális kitérés x irányban:

$$x_{max} = \frac{v_0\tau}{2},$$

ezalatt y irányban a gömb elmozdulása

$$y_{max} = Qv_0B\frac{\tau^2}{3m}.$$

(Vigyázat: y_{max} nem a legnagyobb elmodulás y irányban, hiszen $t = \tau$ pillanatban, amikor a test x irányú sebessége előjelet vált, a y irányú sebesség még nem csökkent le nullára, sőt, éppen maximális.) A lengési sík (kicsinynek feltételezett φ elfordulási szögére a

$$\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi = \frac{y_{max}}{x_{max}}$$

becslés adható (*6. ábra*). A sík forgásának szögsebessége: $\omega = \varphi/\tau$, a körülfordulás ideje pedig $T_1 = 3\pi m/(QB)$, ami a pontos érék $3/4$ része.

Második közelítésben tegyük fel, hogy a gömb v_x sebessége koszinusz függvény szerint csökken nullára (*7. ábra*):

$$v_x(t) = v_0\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}.$$

A rezgőmozgás ismert képleteit alkalmazva megfelelő elmozdulás

$$x(t) = \frac{2v_0\tau}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau},$$

az y irányú gyorsulás, sebesség és elmozdulás pedig

$$a_y(t) = \frac{Qv_0B}{m}\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau},$$

$$v_y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \cdot \frac{2\tau}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau},$$

$$y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \cdot \left(\frac{2\tau}{\pi} \right)^2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} \right).$$

Az előző közelítésben alkalmazott gondolatmenetet követve kiszámítjuk a negyed periódus utáni φ szögelfordulást, ebből a szögsebességet, végül pedig a teljes körülfordulási időt, amire $T_2 = \pi^2 m/(QB)$, a pontos érték $\pi/4$-szerese adódik.

Harmadik közelítésünk az előzőktől lényegesen eltérő gondolatmenetre támaszkodik. Ne vizsgáljuk a lengés negyed periódusát, szorítkozzunk csak a meglökést követő igen rövid $\triangle t$ időtartamra! A megfelelő irányú elmozdulások az egyenletes, illetve a rövid idő alatt állandónak tekinthető Lorentz-erőnek megfelelő egyenletesen változó mozgás képletei szerint

$$\triangle x = v_0 \triangle t,$$

$$\triangle y = \frac{Qv_0B}{2m} (\triangle t)^2.$$

A szögelfordulás nagysága ezalatt

$$\triangle \varphi = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{QB}{2m} \triangle t,$$

a megfelelő szögsebesség

$$\omega = \frac{\triangle \varphi}{\triangle t} = \frac{QB}{2m},$$

a lengési sík teljes körülfordulási ideje pedig $T_3 = 4\pi m/(QB)$. Ez az idő pontosan egyenlő a helyes értékkel, ami nem véletlen, hiszen most – az adott keretek között – nem hanyagoltunk el semmi lényegeset. Ez a megoldás mégsem tekinthető a kérdéses mozgás teljes leírásának, hiszen nem bizonyítja, hogy a lengési sík elfordulásának szögsebessége időben állandó. Ha valahonnan tudjuk, hogy az elfordulás egyenletes, akkor annak ütemét meghatározhatjuk a mozgás kezdeti, nagyon rövid szakaszából, de ha ebből az értékből a mozgás későbbi menetére következtethetünk, az csak becslésnek tekinthető.

A verseny eredménye

I. díjat nyert a verseny 1. helyezettje: **Katz Sándor**, az ELTE fizikus hallgatója, aki Bonyhádon érettségizett a Petőfi Sándor Evangélikus Gimnáziumban, mint *Erdélyesi János, Jurisits József és Kotek László* tanítványa.

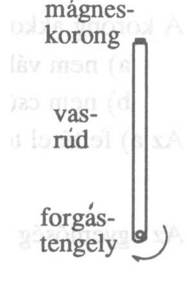
II. díjat nyert a verseny 2 – 6. helyezettje: 2. **Veres Gábor**, az ELTE fizikus hallgatója, aki Balassagyarmaton érettségizett a Balassi Bálint Gimnáziumban, mint *Bognár Mihályné* és *Fűrész István* tanítványa. 3. **Prohászka Zoltán**, a budapesti Veres Pálné Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Oporné Fodor Mária* tanítványa. 4. **Gefferth András**, a BME informatika szakos hallgatója, aki Budapesten érettségizett a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban, mint *Horváth Gábor* tanítványa. 5. **Futó Gábor**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziujm IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa. 6. **Burcsi Péter**, a pápai Türr István Gimnázium és Óvónői Szakközépiskola II. osztályos tanulója, *Németh Zsolt* tanítványa.

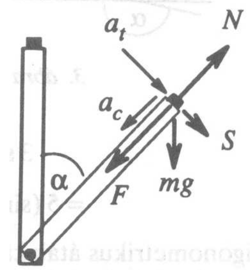
III. díjat nyert a verseny 7-11. helyezettje: 7. **Kovács Krisztián**, a békéscsabai Kemény Gábor Műszaki Szakközépiskola III. osztályos tanulója, *Mekis László* tanítványa. 8. **Varga Dezső**, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium III. osztályos tanulója, *id. Szabó Kálmán* tanítványa. 9. **Székely Sándor**, a BME informatikus szakos hallgatója, aki Kecskeméten érettségizett a Katona József Gimnáziumban, mint *Németh Ágnes* tanítványa. 10. **Költl Péter**, a győri Révai Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Székely László* tanítványa. 11. **Farkas Zénó**, az ELTE fizikus hallgatója, aki Győrben érettségizett a Révai Miklós Gimnáziumban, mint *Takács István* tanítványa.

A bíráló bizottság (Radnai Gyula (elnök), Károlyházy Frigyes, Gnädig Péter) a beérkezett dolgozatok közül csak ezt a 11 dolgozatot díjazta, a többit nem rangsorolta. Az első díjjal 6000 Ft, a másodikkal 3000 Ft, a harmadikkal 2000 Ft pénzjutalom is járt az Eötvös Loránd Fizikai Társulat jóvoltából.

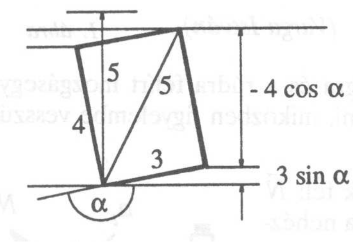
Gratulálunk a nyerteseknek!

Radnai Gyula

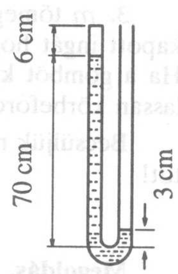




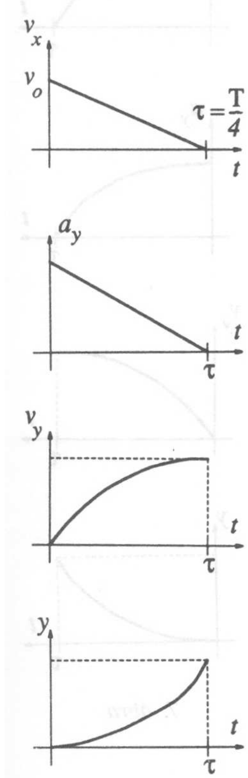
N
a_t
a_c
S
α
F
mg



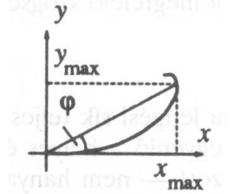
5
5
4
3
- 4 cos α
3 sin α
α

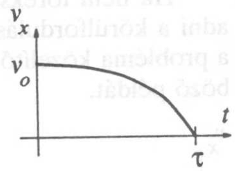


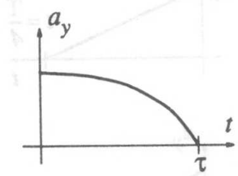
6 cm
70 cm
3 cm

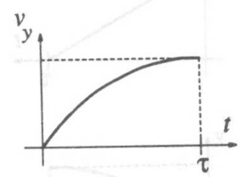


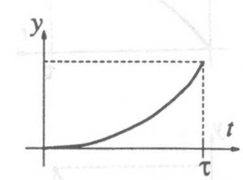
v_x
v_o
$\tau = \frac{T}{4}$
t
a_y
t
τ
v_y
t
τ
y
t
τ


y
y max
φ
x
x max


v x
v o
t
τ


a y
t
τ


v y
t
τ


y
t
τ